Losowe układy dynamiczne ze skokami i intensywnością typu funkcyjnego.

Joanna Kubieniec

26 września 2018

[1] S. Meyn, R. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability,* Springer, Berlin, 1993

[1] S. Meyn, R. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability,* Springer, Berlin, 1993

[2] L. Arnold, *Random Dynamical Systems,* Springer, Berlin, 1998

[1] S. Meyn, R. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability,* Springer, Berlin, 1993

[2] L. Arnold, *Random Dynamical Systems,* Springer, Berlin, 1998

[3] M. H. A. Davis, *Markov Models and Optimization,* Chapman and Hall, London, 1993

- K. Horbacz, *Invariant measures for random dynamical systems*, Dissertationes Math. 451 (2008)

- K. Horbacz, *Invariant measures for random dynamical systems*, Dissertationes Math. 451 (2008)
- J. Kazak, *Piecewise-deterministic Markov processes*, Annales Polonici Mathematici 109 (2013), 279-296

- K. Horbacz, *Invariant measures for random dynamical systems*, Dissertationes Math. 451 (2008)
- J. Kazak, *Piecewise-deterministic Markov processes*, Annales Polonici Mathematici 109 (2013), 279-296
- J. Kubieniec, *Random dynamical systems with jumps and with a function type intensity*, Annales Mathematicae Silesianae (2016),

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, \ldots, N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, \ldots, N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,

$$S_i(0, x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$

$$S_i(s + t, x) = S_i(s, S_i(t, x)) \text{ dla } s, t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, \ldots, N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,

$$S_i(0, x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$

$$S_i(s + t, x) = S_i(s, S_i(t, x)) \text{ dla } s, t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$

- $(p_1, \ldots, p_n)$, $p_i : Y \to [0, 1], i \in I,$,
  $[p_{ij}]_{i,j \in I}, p_{ij} : Y \to [0, 1], i, j \in I,$

- (Y,ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0,\infty)$, $I = \{1,\dots,N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,
$$S_i(0,x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$
$$S_i(s+t,x) = S_i(s, S_i(t,x)) \text{ dla } s,t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$
- $(p_1,\dots,p_n)$, $p_i : Y \to [0,1], i \in I,$,
  $[p_{ij}]_{i,j\in I}, p_{ij} : Y \to [0,1], i,j \in I,$
- funkcje ciągłe $q : Y \times \Theta \to Y$ oraz $\lambda : Y \to (0,\infty)$, gdzie $\underline{\lambda} = \inf_{x\in Y} \lambda(x) > 0$.

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, ..., N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,

$$S_i(0, x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$

$$S_i(s+t, x) = S_i(s, S_i(t, x)) \text{ dla } s, t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$

- $(p_1, ..., p_n)$, $p_i : Y \to [0, 1], i \in I$,,
  $[p_{ij}]_{i,j \in I}, p_{ij} : Y \to [0, 1], i, j \in I$,
- funkcje ciągłe $q : Y \times \Theta \to Y$ oraz $\lambda : Y \to (0, \infty)$, gdzie $\underline{\lambda} = \inf_{x \in Y} \lambda(x) > 0$.
- $(\Omega, \Sigma, prob)$,

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, ..., N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,

$$S_i(0, x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$
$$S_i(s + t, x) = S_i(s, S_i(t, x)) \text{ dla } s, t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$

- $(p_1, ..., p_n)$, $p_i : Y \to [0, 1], i \in I,$,
  $[p_{ij}]_{i,j\in I}, p_{ij} : Y \to [0, 1], i, j \in I,$
- funkcje ciągłe $q : Y \times \Theta \to Y$ oraz $\lambda : Y \to (0, \infty)$, gdzie $\underline{\lambda} = \inf_{x\in Y} \lambda(x) > 0$.
- $(\Omega, \Sigma, prob)$,
- $\{t_n\}_{n\geqslant 0}$ niemalejący ciąg zmiennych losowych $t_n : \Omega \to R_+$ oraz $t_0 = 0$.

- (Y, ρ)- przestrzeń polska,
  $R_+ = [0, \infty)$, $I = \{1, \ldots, N\}$,
  $\Theta-$ zwarta przestrzeń metryczna,
- $S_i : R_+ \times Y \to Y$, $i \in I$, rodzina układów dynamicznych,

$$S_i(0, x) = x \text{ dla } i \in I, x \in Y$$

$$S_i(s + t, x) = S_i(s, S_i(t, x)) \text{ dla } s, t \in R_+, i \in I \text{ oraz } x \in Y.$$

- $(p_1, \ldots, p_n)$, $p_i : Y \to [0, 1], i \in I,$,
  $[p_{ij}]_{i,j \in I}, p_{ij} : Y \to [0, 1], i, j \in I,$
- funkcje ciągłe $q : Y \times \Theta \to Y$ oraz $\lambda : Y \to (0, \infty)$, gdzie $\underline{\lambda} = \inf_{x \in Y} \lambda(x) > 0$.
- $(\Omega, \Sigma, prob)$,
- $\{t_n\}_{n \geqslant 0}$ niemalejący ciąg zmiennych losowych $t_n : \Omega \to R_+$ oraz $t_0 = 0$.
- $\{\eta_n\}_{n \in N}$ ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i wartościach w przestrzeni Θ, ich rozkład oznaczamy literą κ.

$S_k \in \{S_1, ..., S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_0 = k|x_0 = x) = p_k(x)$

$S_k \in \{S_1, ..., S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_0 = k|x_0 = x) = p_k(x)$

$prob(t_1 \leqslant t|\xi_0 = k \text{ and } x_0 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_k(s,x))ds}$
$x_1 = q(S_k(t_1, x_0), \eta_1)$

$S_k \in \{S_1, \dots, S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I,\ prob(\xi_0 = k | x_0 = x) = p_k(x)$

$prob(t_1 \leqslant t | \xi_0 = k \text{ and } x_0 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_k(s,x))ds}$
$x_1 = q(S_k(t_1, x_0), \eta_1)$

$S_{i_1} \in \{S_1, \dots, S_N\}$,
$\xi_1 : \Omega \longrightarrow I,\ prob(\xi_1 = i_1 | x_1 = x \text{ and } \xi_0 = k) = p_{ki_1}(x)$

$S_k \in \{S_1, ..., S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I,\ prob(\xi_0 = k | x_0 = x) = p_k(x)$

$prob(t_1 \leqslant t | \xi_0 = k \text{ and } x_0 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_k(s,x))ds}$
$x_1 = q(S_k(t_1, x_0), \eta_1)$

$S_{i_1} \in \{S_1, ..., S_N\}$,
$\xi_1 : \Omega \longrightarrow I,\ prob(\xi_1 = i_1 | x_1 = x \text{ and } \xi_0 = k) = p_{ki_1}(x)$

$prob(t_2 - t_1 \leqslant t | \xi_1 = i_1 \text{ and } x_1 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_{i_1}(s,x))ds}$
$x_2 = q(S_{i_1}(t_2 - t_1, x_1), \eta_2)$

$S_k \in \{S_1, \ldots, S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_0 = k | x_0 = x) = p_k(x)$

$prob(t_1 \leqslant t | \xi_0 = k \text{ and } x_0 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_k(s,x))ds}$
$x_1 = q(S_k(t_1, x_0), \eta_1)$

$S_{i_1} \in \{S_1, \ldots, S_N\}$,
$\xi_1 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_1 = i_1 | x_1 = x \text{ and } \xi_0 = k) = p_{ki_1}(x)$

$prob(t_2 - t_1 \leqslant t | \xi_1 = i_1 \text{ and } x_1 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_{i_1}(s,x))ds}$
$x_2 = q(S_{i_1}(t_2 - t_1, x_1), \eta_2)$

$S_{i_2} \in \{S_1, \ldots, S_N\}$,
$\xi_2 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_2 = i_2 | x_2 = x \text{ and } \xi_1 = i_1) = p_{i_1 i_2}(x)$

$S_k \in \{S_1, \dots, S_N\}$,
$\xi_0 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_0 = k | x_0 = x) = p_k(x)$

$prob(t_1 \leqslant t | \xi_0 = k \text{ and } x_0 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_k(s,x))ds}$
$x_1 = q(S_k(t_1, x_0), \eta_1)$

$S_{i_1} \in \{S_1, \dots, S_N\}$,
$\xi_1 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_1 = i_1 | x_1 = x \text{ and } \xi_0 = k) = p_{ki_1}(x)$

$prob(t_2 - t_1 \leqslant t | \xi_1 = i_1 \text{ and } x_1 = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_{i_1}(s,x))ds}$
$x_2 = q(S_{i_1}(t_2 - t_1, x_1), \eta_2)$

$S_{i_2} \in \{S_1, \dots, S_N\}$,
$\xi_2 : \Omega \longrightarrow I$, $prob(\xi_2 = i_2 | x_2 = x \text{ and } \xi_1 = i_1) = p_{i_1 i_2}(x)$

...

$\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$, $\xi_n : \Omega \rightarrow I$

$$prob(\xi_0 = i | x_0 = x) = p_i(x),$$
$$prob(\xi_n = s | x_n = x \text{ and } \xi_{n-1} = k) = p_{ks}(x),$$

dla $n \geqslant 1, x, y \in Y, k, i \in I$.

$\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$, $\xi_n : \Omega \to I$

$$prob(\xi_0 = i | x_0 = x) = p_i(x),$$
$$prob(\xi_n = s | x_n = x \text{ and } \xi_{n-1} = k) = p_{ks}(x),$$

dla $n \geqslant 1, x, y \in Y, k, i \in I$.

$\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$, $\xi_n : \Omega \to I$

$$prob(\xi_0 = i | x_0 = x) = p_i(x),$$
$$prob(\xi_n = s | x_n = x \text{ and } \xi_{n-1} = k) = p_{ks}(x),$$

dla $n \geqslant 1, x, y \in Y, k, i \in I$.
$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, $x_n : \Omega \to Y$,

$$x_{n+1} = q(S_{\xi_n}(t_{n+1} - t_n, x_n), \eta_{n+1}) \text{ dla } n = 0, 1 \ldots$$

gdzie

$$prob(t_{n+1} - t_n \leqslant t | \xi_n = s \text{ and } x_n = x) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(S_s(z,x))dz}.$$

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$
$\overline{\rho}((x,i),(y,j)) = \rho(x,y) + \rho_c(i,j)$ dla $x, y \in Y, i, j \in I$

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$
$\overline{\rho}((x,i),(y,j)) = \rho(x,y) + \rho_c(i,j)$ dla $x, y \in Y, i, j \in I$

$\{(x_n, \xi_n)\}_{n \geqslant 0}$

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$
$\overline{\rho}((x,i),(y,j)) = \rho(x,y) + \rho_c(i,j)$ dla $x, y \in Y, i, j \in I$

$\{(x_n, \xi_n)\}_{n \geqslant 0}$

$$\mu_n(A) = prob\{(x_n, \xi_n) \in A\},$$

$A \in B_X$.

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$
$\overline{\rho}((x,i),(y,j)) = \rho(x,y) + \rho_c(i,j)$ dla $x, y \in Y, i, j \in I$

$\{(x_n, \xi_n)\}_{n \geqslant 0}$

$$\mu_n(A) = prob\{(x_n, \xi_n) \in A\},$$

$A \in B_X$.
$P : M(X) \to M(X)$

$$\mu_{n+1} = P\mu_n.$$

$X = Y \times I$, $(X, \overline{\rho})$
$\overline{\rho}((x,i),(y,j)) = \rho(x,y) + \rho_c(i,j)$ dla $x, y \in Y, i, j \in I$

$\{(x_n, \xi_n)\}_{n \geqslant 0}$

$$\mu_n(A) = prob\{(x_n, \xi_n) \in A\},$$

$A \in B_X$.
$P : M(X) \to M(X)$

$$\mu_{n+1} = P\mu_n.$$

$$P\mu(A) = \sum_{s=1}^{N} \int_X \int_0^\infty \int_\Theta 1_A(q(S_s(t,x),\theta),s) e^{-L(t,x,k)} \lambda(S_k(t,x)) p_{ks}(x) d\kappa(\theta) dt d\mu(x,k)$$

$U : B(X) \to B(X)$

$$Uf(x,k) = \sum_{s=1}^{N} \int_0^\infty \int_\Theta f(q(S_s(t,x),\theta),s) e^{-L(t,x,k)} \lambda(S_k(t,x)) p_{ks}(x) d\kappa(\theta) dt,$$

gdzie $L(t,x,k) = \int_0^t \lambda(S_k(z,x)) dz$.

Definicja

Miarę μ nazywamy niezmienniczą dla operatora P jeżeli $P\mu = \mu$.

Definicja

Operator P nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli istnieje taka miara niezmiennicza $\mu_* \in M_1$, że

$$\lim_{n\to\infty} ||P^n\mu - \mu_*|| = 0 \ dla\ każdej\ \mu \in M_1.$$

- Funkcje $S_i : \mathbb{R}_+ \times Y \longrightarrow Y, i \in I$ są ciągłe i istnieje takie $x_* \in Y$, że

$$\int_0^\infty \rho(S_j(t, x_*), x_*)e^{-\underline{\lambda} t} dt < \infty, \text{ dla } j \in I, \tag{1}$$

$$\int_\Theta \varrho(q(x_*, \theta), x_*) d\kappa(\theta) < \infty. \tag{2}$$

- Funkcje $p_{ks} : Y \longrightarrow [0, 1]$ spełniają warunek

$$\sum_{s=1}^{N} |p_{ks}(x) - p_{ks}(y)| \leqslant \psi_1(\rho(x, y)), \text{ dla } x, y \in Y \text{ oraz } k \in I, \tag{3}$$

$$\sigma = \inf\{p_{ks}(x)\} > 0.$$

- Istnieją stałe $L \geqslant 1, \alpha \in R$ oraz $l_q > 0, l_\lambda > 0$ takie, że

$$\sum_{s=1}^{N} p_{ks}(y)\rho(S_s(t,x), S_s(t,y)) \leqslant Le^{\alpha t}\rho(x,y), \text{ dla } x, y \in Y \tag{4}$$

- $$||q(x,\cdot) - q(y,\cdot)||_{L_1(\kappa)} \leqslant l_q \rho(x,y), \text{ dla } x, y \in Y \tag{5}$$

  oraz

- $$\begin{aligned} &|\lambda(x) - \lambda(y)| \leqslant l_\lambda \rho(x,y), \text{ dla } x, y \in Y, \\ &\underline{\lambda} = \inf_{x \in Y} \lambda(x) > 0, \\ &\overline{\lambda} = \sup_{x \in Y} \lambda(x) < \infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Twierdzenie

Załóżmy, że (1)-(6) są spełnione. Niech

$$LI_q\overline{\lambda} + \alpha < \underline{\lambda}. \tag{7}$$

Wówczas operator P ma miarę niezmienniczą.

Twierdzenie

Załóżmy, że (1)-(7) są spełnione. Załóżmy dodatkowo, że dla α *z punktu (4) spełniony jest jeden z warunków*

1. $\alpha < 0$ *i istnieje* $\theta_0 \in \Theta$ *takie że,*
$$\kappa(\theta_0) > 0,$$
2. $\alpha \geqslant 0$ *i dla każdego* $\theta \in \Theta$
$$\kappa(\theta) > 0.$$

Wówczas operator P *jest asymptotycznie stabilny.*

Dziękuję za uwagę.

Zakładamy, że dla każdego $n \in N$ zmienna η_{n+1} jest niezależna od u_n, zmienna ξ_{n+1} jest warunkowo niezależna od u_n, przy warunku $x_{n+1} = x$ i $\xi_n = i$, gdzie $u_0 = (x_0, \xi_0)$ oraz $u_n = (x_0, t_1, ..., t_n, \eta_1, ..., \eta_n, \xi_0, ..., \xi_n)$. Dodatkowo zakładamy, że $t_{n+1} - t_n$, η_{n+1} oraz ξ_{n+1} są warunkowo wzajemnie niezależne przy warunkuu_n oraz $t_{n+1} - t_n$, jest niezależne od u_n.