Centralne twierdzenie graniczne dla pewnej ogólnej klasy łańcuchów Markowa

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki, Brenna, 24-28/09/2018

Dawid Czapla
Hanna Wojewódka
Katarzyna Horbacz

UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE

Institute of Mathematics, Bankowa 14, 40-007 Katowice, Poland

Praca źródłowa

Wyniki zawarte w pracy:

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka
A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov Chains,
wysłana w 2018 r. do:
Journal of Mathematical Analysis and Applications.
arXiv: 1804.09220.

Notacja i podstawowe pojęcia

Oznaczenia

Mając zadaną przestrzen metryczną (E, d), definiujemy:

- $\mathcal{B}(E) = \sigma$-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni E;
- $BM(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ jest ograniczona i borelowska}\}$ z normą
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in BM(E);$$
- $BC(E) = \{f \in BM(E) : f \text{ jest ciągła}\}$;
- $BL(E) = \{f \in BM(E) : f \text{ jest lipschitzowska}\}$ z normą
$$\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_\infty, |f|_{Lip}), \quad f \in BL(E),$$
gdzie $|f|_{Lip}$ oznacza minimalną stałą Lipschitza dla funkcji f.
- $\langle f, \mu \rangle := \int_E f \, d\mu$ dla każdej borelowskiej i ograniczonej z dołu funkcji $f : E \to \mathbb{R}$ oraz znakozmiennej miary borelowskiej $\mu : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$.

Mając zadaną przestrzen metryczną (E, d), definiujemy:

- $\mathcal{B}(E) = \sigma$-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni E;
- $BM(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \ f \ \text{jest ograniczona i borelowska}\}$ z normą

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in BM(E);$$

- $BC(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest ciągła}\}$;
- $BL(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest lipschitzowska}\}$ z normą

$$\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_\infty, |f|_{Lip}), \quad f \in BL(E),$$

gdzie $|f|_{Lip}$ oznacza minimalną stałą Lipschitza dla funkcji f.

- $\langle f, \mu \rangle := \int_E f \, d\mu$ dla każdej borelowskiej i ograniczonej z dołu funkcji $f : E \to \mathbb{R}$ oraz znakozmiennej miary borelowskiej $\mu : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$.

Oznaczenia

Mając zadaną przestrzen metryczną (E, d), definiujemy:

- $\mathcal{B}(E) = \sigma$-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni E;
- $BM(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \; f \text{ jest ograniczona i borelowska}\}$ z normą

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in BM(E);$$

- $BC(E) = \{f \in BM(E) : \; f \text{ jest ciągła}\}$;
- $BL(E) = \{f \in BM(E) : \; f \text{ jest lipschitzowska}\}$ z normą

$$\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_{\infty}, |f|_{Lip}), \quad f \in BL(E),$$

gdzie $|f|_{Lip}$ oznacza minimalną stałą Lipschitza dla funkcji f.

- $\langle f, \mu \rangle := \int_E f \, d\mu$ dla każdej borelowskiej i ograniczonej z dołu funkcji $f : E \to \mathbb{R}$ oraz znakozmiennej miary borelowskiej $\mu : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$.

Oznaczenia

Mając zadaną przestrzen metryczną (E, d), definiujemy:

- $\mathcal{B}(E) = \sigma$-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni E;
- $BM(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \ f \ \text{jest ograniczona i borelowska}\}$ z normą

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in BM(E);$$

- $BC(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest ciągła}\}$;
- $BL(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest lipschitzowska}\}$ z normą

$$\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_\infty, |f|_{Lip}), \quad f \in BL(E),$$

  gdzie $|f|_{Lip}$ oznacza minimalną stałą Lipschitza dla funkcji f.
- $\langle f, \mu \rangle := \int_E f \, d\mu$ dla każdej borelowskiej i ograniczonej z dołu funkcji $f : E \to \mathbb{R}$ oraz znakozmiennej miary borelowskiej $\mu : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$.

Mając zadaną przestrzen metryczną (E, d), definiujemy:

- $\mathcal{B}(E) = \sigma$-ciało borelowskich podzbiorów przestrzeni E;
- $BM(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \ f \ \text{jest ograniczona i borelowska}\}$ z normą
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in BM(E);$$
- $BC(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest ciągła}\}$;
- $BL(E) = \{f \in BM(E) : \ f \ \text{jest lipschitzowska}\}$ z normą
$$\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_\infty, |f|_{Lip}), \quad f \in BL(E),$$
gdzie $|f|_{Lip}$ oznacza minimalną stałą Lipschitza dla funkcji f.
- $\langle f, \mu \rangle := \int_E f \, d\mu$ dla każdej borelowskiej i ograniczonej z dołu funkcji $f : E \to \mathbb{R}$ oraz znakozmiennej miary borelowskiej $\mu : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$.

- $\mathcal{P}(E)$ = zbiór wszystkich miar probabilistycznych na $\mathcal{B}(E)$, rozpatrywany z metryką Fortet–Mouriera, zadaną wzorem

$$d_{FM}(\mu,\nu) := \sup\{|\langle f, \mu - \nu\rangle| : \ f \in BL(E), \ \|f\|_{BL} \leqslant 1\}, \quad \mu,\nu \in \mathcal{P}(E).$$

- $\mathcal{P}_r^V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) : \langle V^r, \mu\rangle < \infty\}$ dla danej funkcji borelowskiej $V : E \to [0,\infty)$ oraz $r \in \{1,2\}$.

Fakt 1.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to dla dowolnego ciągu miar $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ oraz $\mu \in \mathcal{P}(E)$ mamy

$$d_{FM}(\mu_n,\mu) \to 0 \Leftrightarrow \mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in CB(E).$$

Fakt 2.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to $(\mathcal{P}(E), d_{FM})$ również jest przestrzenią polską.

Oznaczenia

- $\mathcal{P}(E)$ = zbiór wszystkich miar probabilistycznych na $\mathcal{B}(E)$, rozpatrywany z metryką Fortet–Mouriera, zadaną wzorem

$$d_{FM}(\mu,\nu) := \sup\{|\langle f, \mu-\nu\rangle| : \ f \in BL(E),\ \|f\|_{BL} \leqslant 1\}, \quad \mu,\nu \in \mathcal{P}(E).$$

- $\mathcal{P}_r^V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) : \ \langle V^r, \mu\rangle < \infty\}$ dla danej funkcji borelowskiej $V : E \to [0,\infty)$ oraz $r \in \{1,2\}$.

Fakt 1.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to dla dowolnego ciągu miar $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ oraz $\mu \in \mathcal{P}(E)$ mamy

$$d_{FM}(\mu_n,\mu) \to 0 \Leftrightarrow \mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in CB(E).$$

Fakt 2.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to $(\mathcal{P}(E), d_{FM})$ również jest przestrzenią polską.

Oznaczenia

- $\mathcal{P}(E)$ = zbiór wszystkich miar probabilistycznych na $\mathcal{B}(E)$, rozpatrywany z metryką Fortet–Mouriera, zadaną wzorem

$$d_{FM}(\mu,\nu) := \sup\{ |\langle f, \mu - \nu\rangle| : \ f \in BL(E),\ \|f\|_{BL} \leqslant 1\}, \quad \mu,\nu \in \mathcal{P}(E).$$

- $\mathcal{P}_r^V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) : \ \langle V^r, \mu\rangle < \infty\}$ dla danej funkcji borelowskiej $V : E \to [0,\infty)$ oraz $r \in \{1,2\}$.

Fakt 1.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to dla dowolnego ciągu miar $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ oraz $\mu \in \mathcal{P}(E)$ mamy

$$\begin{aligned} d_{FM}(\mu_n,\mu) \to 0 \Leftrightarrow \mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle f, \mu_n\rangle \to \langle f, \mu\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in CB(E). \end{aligned}$$

Fakt 2.

Jeżeli E jest przestrzenią polską, to $(\mathcal{P}(E), d_{FM})$ również jest przestrzenią polską.

Jądra (sub)stochastyczne

Odwzorowanie $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ nazywamy **jądrem (sub)stochastycznym**, gdy

- $x \mapsto P(x, A)$ jest funkcją borelowską dla każdego $A \in \mathcal{B}(E)$,
- $A \mapsto P(x, A)$ jest miarą (sub)probabilistyczną dla każdego $x \in E$.

Dla zadanego jądra (sub)stochastycznego P, definiujemy również:

$$P^1(x, A) := P(x, A),$$

$$P^{n+1}(x, A) := \int_X P^n(y, A)\, P(x, dy), \quad x \in E,\ A \in \mathcal{B}(E),\ n \in \mathbb{N}.$$

Jądra (sub)stochastyczne

Odwzorowanie $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ nazywamy **jądrem (sub)stochastycznym**, gdy

- $x \mapsto P(x, A)$ jest funkcją borelowską dla każdego $A \in \mathcal{B}(E)$,
- $A \mapsto P(x, A)$ jest miarą (sub)probabilistyczną dla każdego $x \in E$.

Dla zadanego jądra (sub)stochastycznego P, definiujemy również:

$$P^1(x, A) := P(x, A),$$

$$P^{n+1}(x, A) := \int_X P^n(y, A)\, P(x, dy), \quad x \in E,\ A \in \mathcal{B}(E),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego jądra (sub)stochastycznego P możemy określić dwa operatory:

$$(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad \mu P = \int_E P(x,\cdot)\,\mu(dx), \quad \mu \in \mathcal{P}(E), \tag{1}$$

$$P(\cdot) : BM(E) \to BM(E), \quad Pf = \int_E f(y)\,P(\cdot,dy), \quad f \in BM(E). \tag{2}$$

Oczywiście

$$\langle f, \mu P\rangle = \langle Pf, \mu\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in BM(E), \mu \in \mathcal{P}(E).$$

Jeżeli P jest jądrem stochastycznym, to operator (1) nazywamy **(regularnym) operatorem Markowa**, a (2) jego **operatorem dualnym**.

- Operator Markowa P nazywamy **fellerowskim**, gdy $Pf \in CB(E)$ dla każdej funkcji $f \in CB(E)$.
- Miarę $\mu_* \in \mathcal{P}(E)$ nazywamy **niezmienniczą** dla operatora P, gdy $\mu_* P = \mu_*$.

Dla każdego jądra (sub)stochastycznego P możemy określić dwa operatory:

$$(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad \mu P = \int_E P(x, \cdot)\, \mu(dx), \quad \mu \in \mathcal{P}(E), \tag{1}$$

$$P(\cdot) : BM(E) \to BM(E), \quad Pf = \int_E f(y)\, P(\cdot, dy), \quad f \in BM(E). \tag{2}$$

Oczywiście

$$\langle f, \mu P \rangle = \langle Pf, \mu \rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in BM(E), \mu \in \mathcal{P}(E).$$

Jeżeli P jest jądrem stochastycznym, to operator (1) nazywamy **(regularnym) operatorem Markowa**, a (2) jego **operatorem dualnym**.

- Operator Markowa P nazywamy **fellerowskim**, gdy $Pf \in CB(E)$ dla każdej funkcji $f \in CB(E)$.
- Miarę $\mu_* \in \mathcal{P}(E)$ nazywamy **niezmienniczą** dla operatora P, gdy $\mu_* P = \mu_*$.

Dla każdego jądra (sub)stochastycznego P możemy określić dwa operatory:

$$(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad \mu P = \int_E P(x,\cdot)\,\mu(dx), \quad \mu \in \mathcal{P}(E), \tag{1}$$

$$P(\cdot) : BM(E) \to BM(E), \quad Pf = \int_E f(y)\,P(\cdot,dy), \quad f \in BM(E). \tag{2}$$

Oczywiście

$$\langle f, \mu P\rangle = \langle Pf, \mu\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad f \in BM(E), \mu \in \mathcal{P}(E).$$

Jeżeli P jest jądrem stochastycznym, to operator (1) nazywamy **(regularnym) operatorem Markowa**, a (2) jego **operatorem dualnym**.

- Operator Markowa P nazywamy **fellerowskim**, gdy $Pf \in CB(E)$ dla każdej funkcji $f \in CB(E)$.
- Miarę $\mu_* \in \mathcal{P}(E)$ nazywamy **niezmienniczą** dla operatora P, gdy $\mu_* P = \mu_*$.

Załóżmy, że E jest przestrzenią ośrodkową oraz rozważmy

$$\Omega := E^{\mathbb{N}_0} = \{(\omega_0, \omega_1, \dots) : \omega_0, \omega_1, \dots \in E\}$$

z topologią produktową i σ-algebrą $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\Omega)$. Następnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, zdefiniujmy rzutowanie $\Phi_n : \Omega \to E$ wzorem

$$\Phi_n(\omega) := \omega_n \quad \text{dla} \quad \omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega.$$

Fakt 3.

Dla każdego jądra stochastycznego $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ oraz miary $\mu \in \mathcal{P}(E)$ istnieje takie prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_\mu$ na $\mathcal{F}$, że

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_{n-1}} P(x_{n-1}, A_n) P(x_{n-2}, dx_{n-1}) P(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

dla każdego zbioru postaci
$F = A_0 \times \dots A_n \times X \times \dots = \{\Phi_0 \in A_0, \dots, \Phi_n \in A_n\}$, gdzie $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$.

Załóżmy, że E jest przestrzenią ośrodkową oraz rozważmy

$$\Omega := E^{\mathbb{N}_0} = \{(\omega_0, \omega_1, \ldots) : \omega_0, \omega_1, \ldots \in E\}$$

z topologią produktową i σ-algebrą $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\Omega)$. Następnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, zdefiniujmy rzutowanie $\Phi_n : \Omega \to E$ wzorem

$$\Phi_n(\omega) := \omega_n \quad \text{dla} \quad \omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega.$$

Fakt 3.

Dla każdego jądra stochastycznego $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$ oraz miary $\mu \in \mathcal{P}(E)$ istnieje takie prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_\mu$ na $\mathcal{F}$, że

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_{A_0} \int_{A_1} \ldots \int_{A_{n-1}} P(x_{n-1}, A_n) P(x_{n-2}, dx_{n-1}) P(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

dla każdego zbioru postaci
$F = A_0 \times \ldots A_n \times X \times \ldots = \{\Phi_0 \in A_0, \ldots, \Phi_n \in A_n\}$, gdzie $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$.

Wówczas $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ o **funkcji przejścia** P i **rozkładzie początkowym** μ, tj.

$$\mathbb{P}_\mu(\Phi_0 \in A) = \mu(A), \quad \mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A \,|\, \Phi_n = x) = P(x, A), \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Operator Markowa $(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ jest **operatorem przejścia** dla łańcucha $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tzn. jeśli Φ_n ma rozkład μ, to Φ_{n+1} ma rozkład jest μP. Tej samej nazwy będziemy również używać odnosząc się do operatora dualnego $P(\cdot) : BM(E) \to BM(E)$.

Jeżeli rozkład Φ_0 jest miarą niezmienniczą dla P, to łańcuch $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazywamy **stacjonarnym**.

Będziemy stosować oznaczania:

$$\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_\mu(\cdot \,|\, \Phi_0 = x), \quad x \in X,$$

$$\mathbb{P}_x^{1,\dots,n}(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \mathbb{P}_x(\Phi_1 \in dx_1, \dots, \Phi_n \in dx_n), \quad x \in E,\ n \in \mathbb{N}$$

Oczywiście

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_X \mathbb{P}_x(F)\mu(dx), \quad F \in \mathcal{F}$$

Kanoniczny łańcuch Markowa

Wówczas $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ o **funkcji przejścia** P i **rozkładzie początkowym** μ, tj.

$$\mathbb{P}_\mu(\Phi_0 \in A) = \mu(A), \quad \mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A \,|\, \Phi_n = x) = P(x, A), \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Operator Markowa $(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ jest **operatorem przejścia** dla łańcucha $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tzn. jeśli Φ_n ma rozkład μ, to Φ_{n+1} ma rozkład jest μP. Tej samej nazwy będziemy również używać odnosząc się do operatora dualnego $P(\cdot) : BM(E) \to BM(E)$.

Jeżeli rozkład Φ_0 jest miarą niezmienniczą dla P, to łańcuch $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazywamy **stacjonarnym**.

Będziemy stosować oznaczania:

$$\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_\mu(\cdot \,|\, \Phi_0 = x), \quad x \in X,$$

$$\mathbb{P}_x^{1,\dots,n}(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \mathbb{P}_x(\Phi_1 \in dx_1, \dots, \Phi_n \in dx_n), \quad x \in E,\ n \in \mathbb{N}$$

Oczywiście

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_X \mathbb{P}_x(F)\mu(dx), \quad F \in \mathcal{F}$$

Kanoniczny łańcuch Markowa

Wówczas $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ o **funkcji przejścia** P i **rozkładzie początkowym** μ, tj.

$$\mathbb{P}_\mu(\Phi_0 \in A) = \mu(A), \quad \mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A \,|\, \Phi_n = x) = P(x, A), \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Operator Markowa $(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ jest **operatorem przejścia** dla łańcucha $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tzn. jeśli Φ_n ma rozkład μ, to Φ_{n+1} ma rozkład jest μP. Tej samej nazwy będziemy również używać odnosząc się do operatora dualnego $P(\cdot) : BM(E) \to BM(E)$.

Jeżeli rozkład Φ_0 jest miarą niezmienniczą dla P, to łańcuch $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazywamy **stacjonarnym**.

Będziemy stosować oznaczania:

$$\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_\mu(\cdot \,|\, \Phi_0 = x), \quad x \in X,$$

$$\mathbb{P}_x^{1,\ldots,n}(dx_1 \times \ldots \times dx_n) = \mathbb{P}_x(\Phi_1 \in dx_1, \ldots, \Phi_n \in dx_n), \quad x \in E,\ n \in \mathbb{N}$$

Oczywiście

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_X \mathbb{P}_x(F)\mu(dx), \quad F \in \mathcal{F}.$$

Wówczas $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mu)$ o **funkcji przejścia** P i **rozkładzie początkowym** μ, tj.

$$\mathbb{P}_\mu(\Phi_0 \in A) = \mu(A), \quad \mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A \,|\, \Phi_n = x) = P(x, A), \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(E).$$

Operator Markowa $(\cdot)P : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ jest **operatorem przejścia** dla łańcucha $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tzn. jeśli Φ_n ma rozkład μ, to Φ_{n+1} ma rozkład jest μP. Tej samej nazwy będziemy również używać odnosząc się do operatora dualnego $P(\cdot) : BM(E) \to BM(E)$.

Jeżeli rozkład Φ_0 jest miarą niezmienniczą dla P, to łańcuch $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazywamy **stacjonarnym**.

Będziemy stosować oznaczania:

$$\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_\mu(\cdot \,|\, \Phi_0 = x), \quad x \in X,$$

$$\mathbb{P}_x^{1,\ldots,n}(dx_1 \times \ldots \times dx_n) = \mathbb{P}_x(\Phi_1 \in dx_1, \ldots, \Phi_n \in dx_n), \quad x \in E,\ n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście

$$\mathbb{P}_\mu(F) = \int_X \mathbb{P}_x(F)\mu(dx), \quad F \in \mathcal{F}.$$

Sprzęganie (coupling)

Niech $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej E i funkcji przejścia P. Łancuch Markowa $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ przyjmujący wartości w E^2 nazywamy **łańcuchem sprzęgającym (ang. coupling)** dla $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdy jego funkcja przejścia $B : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0, 1]$ spełnia warunek

$$B((x, y), A \times E) = P(x, A) \quad \text{oraz} \quad B((x, y), E \times A) = P(y, A)$$

dla wszystkich $(x, y) \in E^2$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$. Dla prostoty, samo jądro B będziemy również określać mianem *couplingu* dla P.

Uwaga

Jeżeli $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0, 1]$ jest jądrem substochastycznym spełniającym warunek:

$$Q((x, y), A \times E) \leqslant P(x, A) \quad \text{oraz} \quad Q((x, y), E \times A) \leqslant P(y, A) \qquad (\star)$$

dla wszystkich $(x, y) \in E^2$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$, to istnieje takie jądro substochastyczne R na $E^2 \times \mathcal{B}(E^2)$, że

$$B := Q + R$$

stanowi *coupling* dla P.

Niech $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej E i funkcji przejścia P. Łancuch Markowa $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ przyjmujący wartości w E^2 nazywamy **łańcuchem sprzęgającym (ang. coupling)** dla $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdy jego funkcja przejścia $B : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełnia warunek

$$B((x,y), A \times E) = P(x,A) \quad \text{oraz} \quad B((x,y), E \times A) = P(y,A)$$

dla wszystkich $(x,y) \in E^2$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$. Dla prostoty, samo jądro B będziemy również określać mianem *couplingu* dla P.

Uwaga

Jeżeli $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ jest jądrem substochastycznym spełniającym warunek:

$$Q((x,y), A \times E) \leqslant P(x,A) \quad \text{oraz} \quad Q((x,y), E \times A) \leqslant P(y,A) \qquad (\star)$$

dla wszystkich $(x,y) \in E^2$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$, to istnieje takie jądro substochastyczne R na $E^2 \times \mathcal{B}(E^2)$, że

$$B := Q + R$$

stanowi *coupling* dla P.

Funkcją Lapunowa nazwiemy dowolne, ciągłe odzworowanie $V : E \to [0, \infty)$ spełniające warunki:

- V jest funkcją ograniczoną na zbiorach ograniczonych;
- $\lim_{\rho(x,x_0)\to\infty} V(x) = \infty$ dla pewnego $x_0 \in E$ (o ile E jest przestrzenią nieograniczoną).

Przykładem funkcji Lyapunowa jest odwzorowanie $x \mapsto \rho(x_0, x)$, gdzie x_0 jest ustalonym punktem przestrzeni E.

Założenia

Niech (X, ρ) będzie przestrzeń polską, a $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ fellerowskim łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej X i funkcji przejścia $P : X \times \mathcal{B}(X) \to [0, 1]$.

Przyjmujemy następujące założenia:

- P spełnia warunek:

(L) Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV(x) \leqslant aV(x) + b \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

lub (dowodząc CTG) jego silniejszą wersję:

(L') Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

- Istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0, 1]$ o własności $(*)$ (z $E = X$), które dla pewnego zbioru $F \subset X^2$ spełnia warunki:

Warunki Lapunowa

Niech (X, ρ) będzie przestrzeń polską, a $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ fellerowskim łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej X i funkcji przejścia $P : X \times \mathcal{B}(X) \to [0,1]$.

Przyjmujemy następujące założenia:

- P spełnia warunek:

(L) Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0,1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV(x) \leqslant aV(x) + b \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

lub (dowodząc CTG) jego silniejszą wersję:

(L') Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0,1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

- Istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ o własności $(*)$ (z $E = X$), które dla pewnego zbioru $F \subset X^2$ spełnia warunki:

Niech (X, ρ) będzie przestrzeń polską, a $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ fellerowskim łańcuchem Markowa o przestrzeni fazowej X i funkcji przejścia $P : X \times \mathcal{B}(X) \to [0, 1]$.

Przyjmujemy następujące założenia:

- P spełnia warunek:

(L) Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV(x) \leqslant aV(x) + b \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

lub (dowodząc CTG) jego silniejszą wersję:

(L') Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

- Istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0, 1]$ o własności $(\star)$ (z $E = X$), które dla pewnego zbioru $F \subset X^2$ spełnia warunki:

(B0) $\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot) \subset F$ dla wszystkich $(x,y) \in F$.

(B1) Istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że $Q\rho(x,y) \leqslant q\rho(x,y)$ dla $(x,y) \in F$.

(B2) Przyjmując $U_q(x,y) := \{(u,v) \in F : \rho(u,v) \leqslant q\rho(x,y)\}$ dla $(x,y) \in X^2$, mamy

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\big((x,y), U_q(x,y)\big) > 0.$$

(B3) Istnieją takie stałe $\vartheta \in (0,1]$ i $l > 0$, że

$$Q\left((x,y), X^2\right) \geqslant 1 - l\varrho^{\vartheta}(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in F.$$

(B4) Istnieje coupling $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla łańcucha $\mathbf{\Phi}$ o funkcji przejścia $B \geqslant Q$ oraz taka stała $\Gamma > 0$, że dla

$$\rho_{F,V} := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \ (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F, \ \ V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma\right\}$$

oraz pewnych stałych $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$ mamy

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y}(\gamma^{-\rho_{F,V}}) \leqslant c_\gamma, \quad \text{gdy} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1}.$$

(B0) $\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot) \subset F$ dla wszystkich $(x,y) \in F$.

(B1) Istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że $Q\rho(x,y) \leqslant q\rho(x,y)$ dla $(x,y) \in F$.

(B2) Przyjmując $U_q(x,y) := \{(u,v) \in F : \rho(u,v) \leqslant q\rho(x,y)\}$ dla $(x,y) \in X^2$, mamy

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\big((x,y), U_q(x,y)\big) > 0.$$

(B3) Istnieją takie stałe $\vartheta \in (0,1]$ i $l > 0$, że

$$Q\left((x,y), X^2\right) \geqslant 1 - l\varrho^{\vartheta}(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in F.$$

(B4) Istnieje coupling $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla łańcucha $\mathbf{\Phi}$ o funkcji przejścia $B \geqslant Q$ oraz taka stała $\Gamma > 0$, że dla

$$\rho_{F,V} := \inf\left\{n \in \mathbb{N} :\ (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F,\ \ V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma\right\}$$

oraz pewnych stałych $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$ mamy

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y}(\gamma^{-\rho_{F,V}}) \leqslant c_\gamma, \quad \text{gdy} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1}.$$

Własności jądra Q

(B0) $\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot) \subset F$ dla wszystkich $(x,y) \in F$.

(B1) Istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że $Q\rho(x,y) \leqslant q\rho(x,y)$ dla $(x,y) \in F$.

(B2) Przyjmując $U_q(x,y) := \{(u,v) \in F : \rho(u,v) \leqslant q\rho(x,y)\}$ dla $(x,y) \in X^2$, mamy

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\big((x,y), U_q(x,y)\big) > 0.$$

(B3) Istnieją takie stałe $\vartheta \in (0,1]$ i $l > 0$, że

$$Q\left((x,y), X^2\right) \geqslant 1 - l\varrho^{\vartheta}(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in F.$$

(B4) Istnieje coupling $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla łańcucha $\mathbf{\Phi}$ o funkcji przejścia $B \geqslant Q$ oraz taka stała $\Gamma > 0$, że dla

$$\rho_{F,V} := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \ (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F, \ \ V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma\right\}$$

oraz pewnych stałych $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$ mamy

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y}(\gamma^{-\rho_{F,V}}) \leqslant c_\gamma, \quad \text{gdy} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1}.$$

Własności jądra Q

(B0) $\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot) \subset F$ dla wszystkich $(x,y) \in F$.

(B1) Istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że $Q\rho(x,y) \leqslant q\rho(x,y)$ dla $(x,y) \in F$.

(B2) Przyjmując $U_q(x,y) := \{(u,v) \in F : \rho(u,v) \leqslant q\rho(x,y)\}$ dla $(x,y) \in X^2$, mamy

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\big((x,y), U_q(x,y)\big) > 0.$$

(B3) Istnieją takie stałe $\vartheta \in (0,1]$ i $l > 0$, że

$$Q\left((x,y), X^2\right) \geqslant 1 - l\varrho^{\vartheta}(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in F.$$

(B4) Istnieje coupling $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla łańcucha $\mathbf{\Phi}$ o funkcji przejścia $B \geqslant Q$ oraz taka stała $\Gamma > 0$, że dla

$$\rho_{F,V} := \inf\left\{n \in \mathbb{N} :\ (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F,\ \ V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma\right\}$$

oraz pewnych stałych $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$ mamy

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y}(\gamma^{-\rho_{F,V}}) \leqslant c_\gamma, \quad \text{gdy} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1}.$$

Własności jądra Q

(B0) $\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot) \subset F$ dla wszystkich $(x,y) \in F$.

(B1) Istnieje taka stała $q \in (0,1)$, że $Q\rho(x,y) \leqslant q\rho(x,y)$ dla $(x,y) \in F$.

(B2) Przyjmując $U_q(x,y) := \{(u,v) \in F : \rho(u,v) \leqslant q\rho(x,y)\}$ dla $(x,y) \in X^2$, mamy

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\big((x,y), U_q(x,y)\big) > 0.$$

(B3) Istnieją takie stałe $\vartheta \in (0,1]$ i $l > 0$, że

$$Q\left((x,y), X^2\right) \geqslant 1 - l\varrho^{\vartheta}(x,y) \quad \text{dla} \quad (x,y) \in F.$$

(B4) Istnieje coupling $\{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dla łańcucha $\mathbf{\Phi}$ o funkcji przejścia $B \geqslant Q$ oraz taka stała $\Gamma > 0$, że dla

$$\rho_{F,V} := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \ (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F, \ \ V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma\right\}$$

oraz pewnych stałych $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$ mamy

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{x,y}(\gamma^{-\rho_{F,V}}) \leqslant c_\gamma, \quad \text{gdy} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1}.$$

Własności jądra Q

Uwaga

Warunek **(B0)** spełniony jest zawsze dla $F := X^2$. W tym przypadku, jeżeli P spełnia warunek **(L)**, tzn. $PV \leqslant aV + b$ dla pewnej funkcji Lapunowa V oraz stałych $a \in (0,1)$ i $b > 0$, to dowolny coupling dla P spełnia warunek **(B4)**.

Powyższy fakt jest konsekwencją obserwacji, iż dla $\widetilde{V}(x,y) := V(x) + V(y)$,

$$B\widetilde{V}(x,y) \leqslant a\widetilde{V}(x,y) + 4b \quad \text{dla} \quad x \in X$$

(przy założeniu **(L)**) oraz następującego lematu:

Lemat (Kapica & Ślęczka)

Niech $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa, którego operator przejścia P spełnia warunek **(L)**. Wówczas istnieją takie stałe $\bar{\alpha} \in (0,1)$ oraz $\bar{C} \in \mathbb{R}$, że dla

$$\rho_V := \inf\{n \in \mathbb{N} :\ V(\Phi_n) < 2b/(1-a)\},$$

mamy

$$\mathbb{P}_x(\rho_V > n) \leqslant \bar{C}\bar{\alpha}^n(V(x)+1) \quad \text{dla} \quad x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności, istnieją takie stałe $\alpha \in (0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}$, że

$$\mathbb{E}_x(\alpha^{-\rho_V}) \leqslant C(V(x)+1) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Uwaga

Warunek **(B0)** spełniony jest zawsze dla $F := X^2$. W tym przypadku, jeżeli P spełnia warunek **(L)**, tzn. $PV \leqslant aV + b$ dla pewnej funkcji Lapunowa V oraz stałych $a \in (0,1)$ i $b > 0$, to dowolny coupling dla P spełnia warunek **(B4)**.

Powyższy fakt jest konsekwencją obserwacji, iż dla $\widetilde{V}(x,y) := V(x) + V(y)$,

$$B\widetilde{V}(x,y) \leqslant a\widetilde{V}(x,y) + 4b \quad \text{dla} \quad x \in X$$

(przy założeniu **(L)**) oraz następującego lematu:

Lemat (Kapica & Ślęczka)

Niech $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa, którego operator przejścia P spełnia warunek **(L)**. Wówczas istnieją takie stałe $\bar{\alpha} \in (0,1)$ oraz $\bar{C} \in \mathbb{R}$, że dla

$$\rho_V := \inf\{n \in \mathbb{N} : \ V(\Phi_n) < 2b/(1-a)\},$$

mamy

$$\mathbb{P}_x(\rho_V > n) \leqslant \bar{C}\bar{\alpha}^n(V(x)+1) \quad \text{dla} \quad x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności, istnieją takie stałe $\alpha \in (0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}$, że

$$\mathbb{E}_x(\alpha^{-\rho_V}) \leqslant C(V(x)+1) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Ergodyczność i własności couplingu

Stosowane metody dowodu (oparte głównie na asymptotycznych własnościach łańcucha sprzęgającego) bazują na pracach:

M. Hairer
Exponential Mixing Properties of Stochastic PDEs Through Asymptotic Coupling
Probab. Theory Related Fields 124 (2002), 345-380.

R. Kapica and M. Ślęczka
Random iterations with place dependent probabilities
arXiv:1107.0707 (2012)

D. Czapla
A criterion on asymptotic stability for partially equicontinuous Markov operators.
Stochastic Processes and their Applicatons (2018), in press
doi: 10.1016/j.spa.2017.12.006

Konstrukcja couplingu

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.
- Zapiszmy B w postaci $B = Q + R$, gdzie $R := B - Q$.
- Zdefiniujmy $\widehat{X^2} := X^2 \times \{0,1\}$. Oznaczywszy $X_Q^2 := X^2 \times \{1\}$ oraz $X_R^2 := X^2 \times \{0\}$, mamy

$$\widehat{X^2} = X_Q^2 \cup X_R^2 \quad \text{oraz} \quad X_Q^2 \cap X_r^2 = \emptyset.$$

- Rozważmy kanoniczny łańcuch Markowa $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}, \theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni $\widehat{X^2}$ i funkcji przejścia

$$\widehat{B}((x,y,\theta),D) := (\delta_1 \otimes Q(x,y,\cdot))(D) + (\delta_0 \otimes R(x,y,\cdot))(D),$$

określony na kanonicznej przestrzeni probabilistycznej $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$.

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.
- Zapiszmy B w postaci $B = Q + R$, gdzie $R := B - Q$.
- Zdefiniujmy $\widehat{X^2} := X^2 \times \{0,1\}$. Oznaczywszy $X_Q^2 := X^2 \times \{1\}$ oraz $X_R^2 := X^2 \times \{0\}$, mamy

$$\widehat{X^2} = X_Q^2 \cup X_R^2 \quad \text{oraz} \quad X_Q^2 \cap X_r^2 = \emptyset.$$

- Rozważmy kanoniczny łańcuch Markowa $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \{(\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}, \theta_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni $\widehat{X^2}$ i funkcji przejścia

$$\widehat{B}((x,y,\theta),D) := (\delta_1 \otimes Q(x,y,\cdot))(D) + (\delta_0 \otimes R(x,y,\cdot))(D),$$

określony na kanonicznej przestrzeni probabilistycznej $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$.

Konstrukcja couplingu

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.
- Zapiszmy B w postaci $B = Q + R$, gdzie $R := B - Q$.
- Zdefiniujmy $\widehat{X^2} := X^2 \times \{0,1\}$. Oznaczywszy $X_Q^2 := X^2 \times \{1\}$ oraz $X_R^2 := X^2 \times \{0\}$, mamy

$$\widehat{X^2} = X_Q^2 \cup X_R^2 \quad \text{oraz} \quad X_Q^2 \cap X_r^2 = \emptyset.$$

Konstrukcja couplingu

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.
- Zapiszmy B w postaci $B = Q + R$, gdzie $R := B - Q$.
- Zdefiniujmy $\widehat{X^2} := X^2 \times \{0,1\}$. Oznaczywszy $X^2_Q := X^2 \times \{1\}$ oraz $X^2_R := X^2 \times \{0\}$, mamy

$$\widehat{X^2} = X^2_Q \cup X^2_R \quad \text{oraz} \quad X^2_Q \cap X^2_r = \emptyset.$$

- Rozważmy kanoniczny łańcuch Markowa $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \{(\Phi^{(1)}_n, \Phi^{(2)}_n, \theta_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni $\widehat{X^2}$ i funkcji przejścia

$$\widehat{B}((x,y,\theta),D) := (\delta_1 \otimes Q(x,y,\cdot))(D) + (\delta_0 \otimes R(x,y,\cdot))(D),$$

określony na kanonicznej przestrzeni probabilistycznej $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$. Wówczas

$$\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{n+1} \in C \times \{1\} \mid \widehat{\mathbf{\Phi}}_n = (x,y,\theta)) = Q(x,y,C)$$

$$\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{n+1} \in C \times \{0\} \mid \widehat{\mathbf{\Phi}}_n = (x,y,\theta)) = R(x,y,C)$$

dla dowolnych $(x,y,\theta) \in \widehat{X^2}$, $C \in \mathcal{B}(X^2)$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$.

Przypuśćmy, że operator P ma własność **(L)** oraz załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające warunki **(B0)-(B4)**, dla którego zachodzi $(\star)$.

- Rozważmy coupling $B : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ (odpowiadający P), dla którego zachodzi warunek **(B4)**. W szczególności, $B \geqslant Q$.
- Zapiszmy B w postaci $B = Q + R$, gdzie $R := B - Q$.
- Zdefiniujmy $\widehat{X^2} := X^2 \times \{0,1\}$. Oznaczywszy $X^2_Q := X^2 \times \{1\}$ oraz $X^2_R := X^2 \times \{0\}$, mamy
$$\widehat{X^2} = X^2_Q \cup X^2_R \quad \text{oraz} \quad X^2_Q \cap X^2_r = \emptyset.$$
- Rozważmy kanoniczny łańcuch Markowa $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \{(\Phi^{(1)}_n, \Phi^{(2)}_n, \theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni $\widehat{X^2}$ i funkcji przejścia
$$\widehat{B}((x,y,\theta), D) := (\delta_1 \otimes Q(x,y,\cdot))(D) + (\delta_0 \otimes R(x,y,\cdot))(D),$$
określony na kanonicznej przestrzeni probabilistycznej $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$. Wówczas
$$\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{n+1} \in C \times \{1\} \,|\, \widehat{\mathbf{\Phi}}_n = (x,y,\theta)) = Q(x,y,C)$$
$$\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{\mathbf{\Phi}}_{n+1} \in C \times \{0\} \,|\, \widehat{\mathbf{\Phi}}_n = (x,y,\theta)) = R(x,y,C)$$
dla dowolnych $(x,y,\theta) \in \widehat{X^2}$, $C \in \mathcal{B}(X^2)$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$.

Estymacja średniej odległości między kopiami łańcucha

Oznaczmy $\widehat{\mathbb{P}}_{x,y} := \widehat{\mathbb{P}}(\cdot \mid \widehat{\mathbf{\Phi}}_0 = (x, y, 1))$ dla $(x, y) \in X^2$ oraz zdefiniujmy zmienne losowe:

$$\rho^{(m)}_{F,V} := \inf \left\{ n \geqslant m : \ (\Phi^{(1)}_n, \Phi^{(2)}_n) \in F, \ \ V(\Phi^{(1)}_n) + V(\Phi^{(2)}_n) < \Gamma \right\},$$

$$\tau := \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \ \widehat{\mathbf{\Phi}}_k \in X^2_Q \ \text{ dla } \ k \geqslant n \right\} = \inf\{ n \in \mathbb{N} : \ \theta_k = 1 \ \text{ dla } \ k \geqslant n \}.$$

Wówczas, dla dowolnych $f \in BL(X)$, $(x, y) \in X^2$ oraz $n > M > N$ mamy

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}_{x,y}|f(\phi^{(1)}_n) - f(\phi^{(2)}_n)| &= \int_{X^2} |f(u) - f(v)| \, B^n((x, y), du \times dv) \\ &\leqslant \int_{X^2} \varrho(u, v) \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y}|_{\left\{\rho^{(N)}_{F,V} \leqslant M\right\} \cap S_{N,n}} \left(\left(\phi^{(1)}_n, \phi^{(2)}_n \right) \in du \times dv \right) \\ &\quad + 2 \, \|f\|_\infty \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y} \left(\rho^{(N)}_{F,V} > M \right) + 2 \, \|f\|_\infty \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y} \left(\tau > N \right),\end{aligned}$$

gdzie $S_{n,N} := \bigcap_{j=N}^{n} \{\theta_j = 1\}$; oczywiście $\widehat{\mathbb{P}}_{x,y}(S^c_{n,N}) \leq \widehat{\mathbb{P}}_{x,y}(\tau > N)$.

Oznaczmy $\widehat{\mathbb{P}}_{x,y} := \widehat{\mathbb{P}}(\cdot \,|\, \widehat{\mathbf{\Phi}}_0 = (x,y,1))$ dla $(x,y) \in X^2$ oraz zdefiniujmy zmienne losowe:

$$\rho_{F,V}^{(m)} := \inf\left\{ n \geqslant m :\; (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}) \in F, \;\; V(\Phi_n^{(1)}) + V(\Phi_n^{(2)}) < \Gamma \right\},$$

$$\tau := \inf\left\{ n \in \mathbb{N} :\; \widehat{\mathbf{\Phi}}_k \in X_Q^2 \;\text{ dla }\; k \geqslant n \right\} = \inf\{ n \in \mathbb{N} :\; \theta_k = 1 \;\text{ dla }\; k \geqslant n \}.$$

Wówczas, dla dowolnych $f \in BL(X)$, $(x,y) \in X^2$ oraz $n > M > N$ mamy

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}_{x,y} |f(\phi_n^{(1)}) - f(\phi_n^{(2)})| &= \int_{X^2} |f(u) - f(v)| \, B^n((x,y), du \times dv) \\
&\leqslant \int_{X^2} \varrho(u,v) \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y}|_{\left\{\rho_{F,V}^{(N)} \leqslant M\right\} \cap S_{N,n}} \left(\left(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}\right) \in du \times dv \right) \\
&\quad + 2\,\|f\|_\infty \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y} \left(\rho_{F,V}^{(N)} > M \right) + 2\,\|f\|_\infty \, \widehat{\mathbb{P}}_{x,y} \left(\tau > N \right),
\end{aligned}$$

gdzie $S_{n,N} := \bigcap_{j=N}^n \{\theta_j = 1\}$; oczywiście $\widehat{\mathbb{P}}_{x,y}(S_{n,N}^c) \leqslant \widehat{\mathbb{P}}_{x,y}(\tau > N)$.

Lemat

Załóżmy, że operator przejścia P łańcucha $\mathbf{\Phi}$ spełnia warunek **(L)** oraz, że istnieje jądro substochastyczne Q spełniające warunki $(\star)$ oraz **(B0)-(B4)**. Wówczas istnieją takie stałe $\gamma \in (0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}$, że

$$\widehat{\mathbb{E}}_{(x,y)} \left| f(\Phi_n^{(1)}) - f(\Phi_n^{(2)}) \right| \leqslant C \, \|f\|_{BL} \, \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$

dla wszystkich $(x,y) \in X^2$, $f \in BL(X)$ oraz $n \in \mathbb{N}$,

Korzystając z powyższego lematu oraz zupełności przestrzeni $(\mathcal{P}(X), d_{FM})$, otrzymujemy:

Twierdzenie (Wykładnicza ergodyczność w d_{FM}; Kapica & Ślęczka)

Załóżmy, że operator P jest fellerowski. Wówczas, przy założeniach powyższego lematu, operator ten posiada dokładnie jedną niezmienniczą miarę μ_* w $\mathcal{P}(X)$. Ponadto, $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz istnieją takie stałe $\gamma \in (0,1)$ i $C \in \mathbb{R}$, że

$$d_{FM}(\mu P^n, \mu_*) \leqslant C\gamma^n(\langle V, \mu + \mu_* \rangle + 1)$$

dla dowolnych $\mu \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

UWAGA: Przynależność μ_* do $\mathcal{P}_1^V(X)$ wynika z warunku **(L)**.

Lemat

Załóżmy, że operator przejścia P łańcucha $\mathbf{\Phi}$ spełnia warunek **(L)** oraz, że istnieje jądro substochastyczne Q spełniające warunki $(\star)$ oraz **(B0)-(B4)**. Wówczas istnieją takie stałe $\gamma \in (0,1)$ oraz $C \in \mathbb{R}$, że

$$\widehat{\mathbb{E}}_{(x,y)} \left| f(\Phi_n^{(1)}) - f(\Phi_n^{(2)}) \right| \leqslant C \, \|f\|_{BL} \, \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$

dla wszystkich $(x,y) \in X^2$, $f \in BL(X)$ oraz $n \in \mathbb{N}$,

Korzystając z powyższego lematu oraz zupełności przestrzeni $(\mathcal{P}(X), d_{FM})$, otrzymujemy:

Twierdzenie (Wykładnicza ergodyczność w d_{FM}; Kapica & Ślęczka)

Załóżmy, że operator P jest fellerowski. Wówczas, przy założeniach powyższego lematu, operator ten posiada dokładnie jedną niezmienniczą miarę μ_* w $\mathcal{P}(X)$. Ponadto, $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz istnieją takie stałe $\gamma \in (0,1)$ i $C \in \mathbb{R}$, że

$$d_{FM}(\mu P^n, \mu_*) \leqslant C\gamma^n(\langle V, \mu + \mu_* \rangle + 1)$$

dla dowolnych $\mu \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

UWAGA: Przynależność μ_* do $\mathcal{P}_1^V(X)$ wynika z warunku **(L)**.

Centralne twierdzenie graniczne

Źródła

M. Maxwell, M. Woodroofe
Central limit theorems for additive functionals of Markov chains
The Annals of Probability 28 (2000), 713–724.

Oznaczenia

Jak dotychczas, rozważmy fellerowski łańcuch Markowa $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni polskiej (X,ρ) i funkcji przejścia P.

Dla każdej funkcji borelowskiej $f : X \to \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zmienne losowe $s_n(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ i $\mathbb{S}_n(f) : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$, gdzie $\mathcal{D}([0,1])$ oznacza przestrzeń Skorochoda, przyjmując:

$$s_n(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\Phi_k),$$

$$\mathbb{S}_n(f)(t) := \sum_{k=1}^{\lceil nt \rceil} f(\Phi_k) \quad \text{dla} \quad t \in [0,1)\,, \quad \mathbb{S}_n(f)(1) := \mathbb{S}_n(f)(1-).$$

W przypadku, gdy istnieje jedyna miarę niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$ dla P, przyjmujemy:

$$\bar{f} := f - \langle f, \mu_* \rangle\,,$$

$$\sigma^2(f) := \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbb{E}_{\mu_*}(s_n^2(f)), \quad \sigma(f) := \sqrt{\sigma^2(f)}.$$

Jak dotychczas, rozważmy fellerowski łańcuch Markowa $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni polskiej (X,ρ) i funkcji przejścia P.

Dla każdej funkcji borelowskiej $f : X \to \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zmienne losowe $s_n(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ i $\mathbb{S}_n(f) : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$, gdzie $\mathcal{D}([0,1])$ oznacza przestrzeń Skorochoda, przyjmując:

$$s_n(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\Phi_k),$$

$$\mathbb{S}_n(f)(t) := \sum_{k=1}^{\lceil nt \rceil} f(\Phi_k) \quad \text{dla} \quad t \in [0,1)\,, \quad \mathbb{S}_n(f)(1) := \mathbb{S}_n(f)(1-).$$

W przypadku, gdy istnieje jedyna miara niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$ dla P, przyjmujemy:

$$\bar{f} := f - \langle f, \mu_* \rangle\,,$$

$$\sigma^2(f) := \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbb{E}_{\mu_*}(s_n^2(f)), \quad \sigma(f) := \sqrt{\sigma^2(f)}.$$

Oznaczenia

Jak dotychczas, rozważmy fellerowski łańcuch Markowa $\mathbf{\Phi} := \{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni polskiej (X, ρ) i funkcji przejścia P.

Dla każdej funkcji borelowskiej $f : X \to \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zmienne losowe $s_n(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ i $\mathbb{S}_n(f) : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$, gdzie $\mathcal{D}([0,1])$ oznacza przestrzeń Skorochoda, przyjmując:

$$s_n(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\Phi_k),$$

$$\mathbb{S}_n(f)(t) := \sum_{k=1}^{\lceil nt \rceil} f(\Phi_k) \quad \text{dla} \quad t \in [0,1)\,, \quad \mathbb{S}_n(f)(1) := \mathbb{S}_n(f)(1-).$$

W przypadku, gdy istnieje jedyna miarę niezmiennicza $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$ dla P, przyjmujemy:

$$\bar{f} := f - \langle f, \mu_* \rangle\,,$$

$$\sigma^2(f) := \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbb{E}_{\mu_*}(s_n^2(f)), \quad \sigma(f) := \sqrt{\sigma^2(f)}.$$

Przypuśćmy, że P ma dokładnie jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* oraz ustalmy funkcję borelowską $f : X \to \mathbb{R}$.

Powiemy, że łańcuch Markowa $\{f(\Phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

- **spełnia tezę CTG**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{s_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\bar{f}));$$

- **zasadę Donskera (funkcjonalne CTG)**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{\mathbb{S}_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sigma(\bar{f})\mathbb{B},$$

gdzie $\mathbb{B} : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$ jest standardowym ruchem Browna na odcinku czasu $[0,1]$.

Określenie tezy CTG

Przypuśćmy, że P ma dokładnie jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* oraz ustalmy funkcję borelowską $f : X \to \mathbb{R}$.

Powiemy, że łańcuch Markowa $\{f(\Phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

- **spełnia tezę CTG**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{s_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\bar{f}));$$

- **zasadę Donskera (funkcjonalne CTG)**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{\mathbb{S}_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sigma(\bar{f})\mathbb{B},$$

gdzie $\mathbb{B} : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$ jest standardowym ruchem Browna na odcinku czasu $[0,1]$.

Określenie tezy CTG

Przypuśćmy, że P ma dokładnie jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* oraz ustalmy funkcję borelowską $f : X \to \mathbb{R}$.

Powiemy, że łańcuch Markowa $\{f(\Phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

- **spełnia tezę CTG**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{s_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\bar{f}));$$

- **zasadę Donskera (funkcjonalne CTG)**, gdy $\sigma^2(\bar{f}) < \infty$ oraz

$$\frac{\mathbb{S}_n(\bar{f})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sigma(\bar{f})\mathbb{B},$$

gdzie $\mathbb{B} : \Omega \to \mathcal{D}([0,1])$ jest standardowym ruchem Browna na odcinku czasu $[0,1]$.

CTG dla łańcuchów stacjonarnych

UWAGA: Jeżeli μ_* jest miarą niezmienniczą dla P oraz $f \in \mathcal{L}^1(\mu_*)$, to

$$Pf(x) := \int_X f(y)\, P(x, dy)$$

jest poprawnie określone (i skończone) dla μ_* - p.w. $x \in X$.

Twierdzenie (Maxwell & Woodroofe)

Przypuśćmy, że operator P posiada dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$. Dalej, załóżmy, że dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2(\mu_*)$ istnieją takie stałe $\alpha < 1/2$ i $c > 0$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} \leqslant cn^{\alpha} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Wówczas, jeżeli $\mathbb{P}(\Phi_0 \in dx) = \mu_*(dx)$, to

- $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia tezę CTG.
- Jeżeli $f \in \mathcal{L}^r(\mu_*)$ dla pewnego $r > 2$, to $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę Donskera.

M. Maxwell, M. Woodroofe
Central limit theorems for additive functionals of Markov chains
The Annals of Probability 28 (2000), 713–724

UWAGA: Jeżeli μ_* jest miarą niezmienniczą dla P oraz $f \in \mathcal{L}^1(\mu_*)$, to

$$Pf(x) := \int_X f(y)\, P(x, dy)$$

jest poprawnie określone (i skończone) dla μ_* - p.w. $x \in X$.

Twierdzenie (Maxwell & Woodroofe)

Przypuśćmy, że operator P posiada dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}(X)$. Dalej, załóżmy, że dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{L}^2(\mu_*)$ istnieją takie stałe $\alpha < 1/2$ i $c > 0$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} \leqslant cn^{\alpha} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Wówczas, jeżeli $\mathbb{P}(\Phi_0 \in dx) = \mu_*(dx)$, to

- $\{f(\Phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia tezę CTG.
- Jeżeli $f \in \mathcal{L}^r(\mu_*)$ dla pewnego $r > 2$, to $\{f(\Phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę Donskera.

M. Maxwell, M. Woodroofe
Central limit theorems for additive functionals of Markov chains
The Annals of Probability 28 (2000), 713–724.

CTG dla łańcuchów niestacjonarnych w rozważanej klasie

Przypomnijmy:

(L') Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0,1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

Twierdzenie (D.C., H.W. & K.H)

Przypuśćmy, że operator przejścia P łańcucha $\mathbf{\Phi}$ jest fellerowski oraz spełnia warunek **(L')**. Ponadto, załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0,1]$ spełniające $(\star)$ (względem P) oraz posiadające własności **(B0)-(B4)**. Wówczas P posiada dokładnie jedną miarę probabilistyczną μ_*, taką że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$, oraz

- dla każdej rokładu początkowego $\mu \in \mathcal{P}_1^V(X)$ łańcucha $\mathbf{\Phi}$ oraz funkcji $f \in BL(X)$ ciąg $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia tezę CTG.
- jeżeli $\mathbb{P}(\Phi_0 \in dx) = \mu_*(dx)$, to $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę Donskera.

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka
A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov Chains, arXiv: 1804.09220 (2018).

CTG dla łańcuchów niestacjonarnych w rozważanej klasie

Przypomnijmy:

(L') Istnieje taka funkcja Lapunowa $V : X \to [0, \infty)$, że dla pewnych stałych $a \in (0, 1)$ i $b \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X.$$

Twierdzenie (D.C., H.W. & K.H)

Przypuśćmy, że operator przejścia P łańcucha $\mathbf{\Phi}$ jest fellerowski oraz spełnia warunek **(L')**. Ponadto, załóżmy, że istnieje jądro substochastyczne $Q : X^2 \times \mathcal{B}(X^2) \to [0, 1]$ spełniające $(\star)$ (względem P) oraz posiadające własności **(B0)-(B4)**. Wówczas P posiada dokładnie jedną miarę probabilistyczną μ_*, taką że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$, oraz

- dla każdej rokładu początkowego $\mu \in \mathcal{P}_1^V(X)$ łańcucha $\mathbf{\Phi}$ oraz funkcji $f \in BL(X)$ ciąg $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia tezę CTG.
- jeżeli $\mathbb{P}(\Phi_0 \in dx) = \mu_*(dx)$, to $\{f(\Phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę Donskera.

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka
A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov Chains, arXiv: 1804.09220 (2018).

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że
$$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie
$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C \|f\|_{BL} \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$
oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy
$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_x \left[g\left(s_n(\bar{f}) n^{-1/2} \right) \right] - \mathbb{E}_y \left[g\left(s_n(\bar{f}) n^{-1/2} \right) \right] \right| \\ &\leqslant n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \widehat{\mathbb{E}}_{x,y} \left| f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)}) \right| \\ &\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2} \|f\|_{BL} (V(x) + V(y) + 1) \end{aligned}$$
dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że
$$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie
$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C \|f\|_{BL} \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$
oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{k=1}^n P^k \bar{f}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy
$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_x\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right] - \mathbb{E}_y\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right]\right| \\ &\leqslant n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \widehat{\mathbb{E}}_{x,y} \left|f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)})\right| \\ &\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2} \|f\|_{BL} (V(x) + V(y) + 1)\end{aligned}$$
dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że

   $$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie

   $$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C\,\|f\|_{BL}\,\gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$

   oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{k=1}^n P^k \bar{f}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy

   $$\begin{aligned} &\left|\mathbb{E}_x\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right] - \mathbb{E}_y\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right]\right| \\ &\leqslant n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}_{x,y}\left|f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)})\right| \\ &\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2}\,\|f\|_{BL}\,(V(x)+V(y)+1) \end{aligned}$$

   dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że
$$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie
$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C \|f\|_{BL} \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$
oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy
$$\left|\mathbb{E}_x\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right] - \mathbb{E}_y\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right]\right|$$
$$\leqslant n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}_{x,y} \left| f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)}) \right|$$
$$\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2} \|f\|_{BL} (V(x) + V(y) + 1)$$
dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że
$$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie
$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C \|f\|_{BL} \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$
oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy
$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_x\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right] - \mathbb{E}_y\left[g\left(s_n(\bar{f})n^{-1/2}\right)\right]\right| \\ &\leqslant n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \widehat{\mathbb{E}}_{x,y} \left| f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)}) \right| \\ &\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2} \|f\|_{BL} (V(x) + V(y) + 1)\end{aligned}$$
dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Szkic dowodu

1. Na mocy twierdzenia K. & Ś. operator P ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{P}_1^V(X)$ oraz $\mu P^n \xrightarrow{w} \mu_*$ dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}_1(X)$.
2. Korzystając z warunku **(L')**, pokazujemy, że
$$P^n V^2 \leqslant a^{2n} V^2 + 2a^n b(1-a)^{-1} V + b^2(1-a^2)^{-1} + 2ab^2(1-a)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
3. Stosując 1 oraz 2 wnioskujemy, że $\mu_* \in \mathcal{P}_2^V(X)$.
4. Wykorzystując oszacowanie
$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant C \|f\|_{BL} \gamma^n (1 + V(x) + V(y))$$
oraz rezultat 3 pokazujemy, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n P^k \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_*)} < \infty$.
5. Z twierdzenia Maxwella & Woodroofa wnioskujemy, że teza CTG zachodzi dla łańcucha stacjonarnego (o rozkładzie początkowym μ_*).
6. Stosując lemat dot. oszacowania średniej odległości między kopiami łańcucha, otrzymujemy
$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_x \left[g\left(s_n(\bar{f}) n^{-1/2} \right) \right] - \mathbb{E}_y \left[g\left(s_n(\bar{f}) n^{-1/2} \right) \right] \right| \\ &\leqslant n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\mathbb{E}}_{x,y} \left| f(\Phi_k^{(1)}) - f(\Phi_k^{(2)}) \right| \\ &\leqslant C(1-\gamma)^{-1} n^{-1/2} \|f\|_{BL} (V(x) + V(y) + 1) \end{aligned}$$
dla wszystkich $g \in BL(X)$ takich, że $\|g\|_{BL} \leqslant 1$.

Przykład zastosowania: model dla ekspresji genu z uwzględnieniem autoregulacji

Źródło

Prezentowany model został opisany w pracy

S.C. Hille, K. Horbacz and T. Szarek,
Existence of a unique invariant measure for a class of equicontinuous Markov operators with application to a stochastic model for an autoregulated gene
Ann. Math. Blaise Pascal 23(2), 345–380 (2016).

Konstrukcja modelu

- $(H, \|\cdot\|)$ – ośrodkowa przestrzeń Banacha, $X \subset H$ – domknięty;
- $\mathbf{T} = [0, T]$, gdzie $T > 0$;
- $\mathcal{W} : \mathbf{T} \times X \to X$ – odwzorowanie ciągłe względem każdej zmiennej, o tej własności, że dla pewnego $\varepsilon^* > 0$

$$\mathcal{W}(t, x) + h \in X \quad \text{dla wszystkich} \quad t \in \mathbf{T},\ x \in X \quad \text{oraz} \quad h \in B_H(0, \varepsilon^*);$$

- $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$; $\nu_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ – rozkład skupiony na $B_H(0, \varepsilon)$;
- $p : \mathbf{T} \times X \to [0, \infty)$ – funkcja mierzalna i ciągła względem drugiej zmiennej, o tej własności, że

$$\int_{\mathbf{T}} p(t, x)\, dt = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Konstrukcja modelu

- $(H, \|\cdot\|)$ – ośrodkowa przestrzeń Banacha, $X \subset H$ – domknięty;
- $\mathbf{T} = [0, T]$, gdzie $T > 0$;
- $\mathcal{W} : \mathbf{T} \times X \to X$ – odwzorowanie ciągłe względem każdej zmiennej, o tej własności, że dla pewnego $\varepsilon^* > 0$

$$\mathcal{W}(t, x) + h \in X \ \text{ dla wszystkich } \ t \in \mathbf{T},\ x \in X \ \text{ oraz } \ h \in B_H(0, \varepsilon^*);$$

- $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$; $\nu_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ – rozkład skupiony na $B_H(0, \varepsilon)$;
- $p : \mathbf{T} \times X \to [0, \infty)$ – funkcja mierzalna i ciągła względem drugiej zmiennej, o tej własności, że

$$\int_{\mathbf{T}} p(t, x)\, dt = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Konstrukcja modelu

- $(H, \|\cdot\|)$ – ośrodkowa przestrzeń Banacha, $X \subset H$ – domknięty;
- $\mathbf{T} = [0, T]$, gdzie $T > 0$;
- $\mathcal{W} : \mathbf{T} \times X \to X$ – odwzorowanie ciągłe względem każdej zmiennej, o tej własności, że dla pewnego $\varepsilon^* > 0$

$$\mathcal{W}(t, x) + h \in X \text{ dla wszystkich } t \in \mathbf{T},\ x \in X \text{ oraz } h \in B_H(0, \varepsilon^*);$$

- $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$; $\nu_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ – rozkład skupiony na $B_H(0, \varepsilon)$;
- $p : \mathbf{T} \times X \to [0, \infty)$ – funkcja mierzalna i ciągła względem drugiej zmiennej, o tej własności, że

$$\int_{\mathbf{T}} p(t, x)\, dt = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Konstrukcja modelu

- $(H, \|\cdot\|)$ – ośrodkowa przestrzeń Banacha, $X \subset H$ – domknięty;
- $\mathbf{T} = [0, T]$, gdzie $T > 0$;
- $\mathcal{W} : \mathbf{T} \times X \to X$ – odwzorowanie ciągłe względem każdej zmiennej, o tej własności, że dla pewnego $\varepsilon^* > 0$

$$\mathcal{W}(t, x) + h \in X \text{ dla wszystkich } t \in \mathbf{T},\ x \in X \text{ oraz } h \in B_H(0, \varepsilon^*);$$

- $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$; $\nu_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ – rozkład skupiony na $B_H(0, \varepsilon)$;
- $p : \mathbf{T} \times X \to [0, \infty)$ – funkcja mierzalna i ciągła względem drugiej zmiennej, o tej własności, że

$$\int_{\mathbf{T}} p(t, x)\, dt = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

- $(H, \|\cdot\|)$ – ośrodkowa przestrzeń Banacha, $X \subset H$ – domknięty;
- $\mathbf{T} = [0, T]$, gdzie $T > 0$;
- $\mathcal{W} : \mathbf{T} \times X \to X$ – odwzorowanie ciągłe względem każdej zmiennej, o tej własności, że dla pewnego $\varepsilon^* > 0$

$$\mathcal{W}(t, x) + h \in X \text{ dla wszystkich } t \in \mathbf{T},\ x \in X \text{ oraz } h \in B_H(0, \varepsilon^*);$$

- $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$; $\nu_\varepsilon \in \mathcal{P}(H)$ – rozkład skupiony na $B_H(0, \varepsilon)$;
- $p : \mathbf{T} \times X \to [0, \infty)$ – funkcja mierzalna i ciągła względem drugiej zmiennej, o tej własności, że

$$\int_{\mathbf{T}} p(t, x)\, dt = 1 \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Konstrukcja modelu

- Rozważamy proces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (o wartościach w X) zadany wzorem:

$$X_{n+1} = \mathcal{W}(\Delta\tau_{n+1}, X_n) + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie

  - $0 =: \tau_0 < \tau_1 < \ldots \leqslant T$ – czasy losowe o przyrostach $\Delta\tau_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$, posiadających rozkłady warunkowe postaci

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_{n+1} \leqslant t \,|\, X_n = x) = \int_0^t p(s,x)\, ds, \quad t \geqslant 0,\ x \in X,$$

  - $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – zmienne losowe o wartościach w H i jednakowym rozkładzie ν_ε.

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest fellerowskim łańcuchem Markowa o funkcji przejścia

$$P(x,A) = \int_0^T \int_{B_H(0,\varepsilon)} \mathbb{1}_A(\mathcal{W}(t,x)+h) p(t,x)\, \nu^\varepsilon(dh)\, dt, \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(X).$$

- Rozważamy proces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (o wartościach w X) zadany wzorem:

$$X_{n+1} = \mathcal{W}(\Delta\tau_{n+1}, X_n) + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie

  - $0 =: \tau_0 < \tau_1 < \ldots \leqslant T$ – czasy losowe o przyrostach $\Delta\tau_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$, posiadających rozkłady warunkowe postaci

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_{n+1} \leqslant t \,|\, X_n = x) = \int_0^t p(s,x)\,ds, \quad t \geqslant 0,\ x \in X,$$

  - $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – zmienne losowe o wartościach w H i jednakowym rozkładzie ν_ε.

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest fellerowskim łańcuchem Markowa o funkcji przejścia

$$P(x,A) = \int_0^T \int_{B_H(0,\varepsilon)} \mathbb{1}_A(\mathcal{W}(t,x)+h) p(t,x)\,\nu^\varepsilon(dh)\,dt, \quad x \in X,\ A \in \mathcal{B}(X).$$

Założenia dla modelu

(A1) Istnieje funkcja borelowska $\Lambda : \mathbf{T} \times X \to \mathbb{R}$ i taka stała $\bar{q} \in (0,1)$, że

$$\|\mathcal{W}(t,x) - \mathcal{W}(t,y)\| \leqslant \Lambda(x,t)\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X,\ t \in \mathbf{T},$$

$$\int_0^T \Lambda^2(t,x) p(t,x)\,dt \leqslant \bar{q}.$$

(A2) Istnieje taka stała $L_p > 0$, że

$$\int_0^T |p(t,x) - p(t,y)|\,dt \leqslant L_p\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X;$$

(A3) Istnieje taka stała $\delta_p > 0$, że

$$\int_{\mathbf{T}_\gamma(x)} \min\{p(t,x), p(t,y)\}\,dt \geqslant \delta_p,$$

gdzie $\mathbf{T}_\gamma(x) := \{t \in \mathbf{T} : \Lambda(x,t) \leqslant \gamma\}$.

Założenia dla modelu

(A1) Istnieje funkcja borelowska $\Lambda : \mathbf{T} \times X \to \mathbb{R}$ i taka stała $\bar{q} \in (0,1)$, że

$$\|\mathcal{W}(t,x) - \mathcal{W}(t,y)\| \leqslant \Lambda(x,t)\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X,\ t \in \mathbf{T},$$

$$\int_0^T \Lambda^2(t,x) p(t,x)\,dt \leqslant \bar{q}.$$

(A2) Istnieje taka stała $L_p > 0$, że

$$\int_0^T |p(t,x) - p(t,y)|\,dt \leqslant L_p\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X;$$

(A3) Istnieje taka stała $\delta_p > 0$, że

$$\int_{\mathbf{T}_\gamma(x)} \min\{p(t,x), p(t,y)\}\,dt \geqslant \delta_p,$$

gdzie $\mathbf{T}_\gamma(x) := \{t \in \mathbf{T} : \Lambda(x,t) \leqslant \gamma\}$.

Założenia dla modelu

(A1) Istnieje funkcja borelowska $\Lambda : \mathbf{T} \times X \to \mathbb{R}$ i taka stała $\bar{q} \in (0,1)$, że

$$\|\mathcal{W}(t,x) - \mathcal{W}(t,y)\| \leqslant \Lambda(x,t)\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X,\ t \in \mathbf{T},$$

$$\int_0^T \Lambda^2(t,x)p(t,x)\,dt \leqslant \bar{q}.$$

(A2) Istnieje taka stała $L_p > 0$, że

$$\int_0^T |p(t,x) - p(t,y)|\,dt \leqslant L_p\,\|x-y\| \quad \text{for all} \quad x,y \in X;$$

(A3) Istnieje taka stała $\delta_p > 0$, że

$$\int_{\mathbf{T}_\gamma(x)} \min\{p(t,x), p(t,y)\}\,dt \geqslant \delta_p,$$

gdzie $\mathbf{T}_\gamma(x) := \{t \in \mathbf{T} :\ \Lambda(x,t) \leqslant \gamma\}$.

Weryfikacja założeń CTG

- Założenie **(L')** wynika z warunku **(A1)**. Dokładniej mówiąc, dla

$$V(x) = \|x - \bar{x}\|, \quad a := \sqrt{\bar{q}} \;\text{ oraz }\; b := \sqrt{\sup_{t \in \mathbf{T}} \|\mathcal{W}(t, \bar{x}) - \bar{x}\|^2 + \varepsilon^*},$$

  gdzie $\bar{x} \in X$, otrzymujemy

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2, \quad x \in X.$$

- Założenia **(B0)-(B4)** sprawdzamy dla $F = X^2$ oraz

$$Q((x,y), C) := \int_{\mathbf{T}} \int_{B_H(0,\varepsilon)} \mathbb{1}_C\left(\mathcal{W}(t,x) + h, \mathcal{W}(t,y) + h\right) \mathbf{p}(t,x,y)\, \nu^{\varepsilon}(dh)\, dt,$$

gdzie $\mathbf{p}(t,x,y) := \min(p(x,t), p(y,t))$.

- Założenie **(L')** wynika z warunku **(A1)**. Dokładniej mówiąc, dla

$$V(x) = \|x - \bar{x}\|, \quad a := \sqrt{\bar{q}} \quad \text{oraz} \quad b := \sqrt{\sup_{t \in \mathbf{T}} \|\mathcal{W}(t, \bar{x}) - \bar{x}\|^2 + \varepsilon^*},$$

  gdzie $\bar{x} \in X$, otrzymujemy

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2, \quad x \in X.$$

- Założenia **(B0)-(B4)** sprawdzamy dla $F = X^2$ oraz

$$Q((x,y),C) := \int_{\mathbf{T}} \int_{B_H(0,\varepsilon)} \mathbb{1}_C\left(\mathcal{W}(t,x) + h, \mathcal{W}(t,y) + h\right) \mathbf{p}(t,x,y)\, \nu^{\varepsilon}(dh)\, dt,$$

gdzie $\mathbf{p}(t,x,y) := \min(p(x,t), p(y,t))$.

(A1) $\Rightarrow$ **(B1)** *(dla* $q := \sqrt{\bar{q}}$*)*

(A1) *oraz* **(A3)** $\Rightarrow$ **(B2)**

(A1) *oraz* **(A2)** $\Rightarrow$ **(B3)**

- Założenie **(L')** wynika z warunku **(A1)**. Dokładniej mówiąc, dla

$$V(x) = \|x - \bar{x}\|, \quad a := \sqrt{\bar{q}} \quad \text{oraz} \quad b := \sqrt{\sup_{t \in \mathbf{T}} \|\mathcal{W}(t, \bar{x}) - \bar{x}\|^2 + \varepsilon^*},$$

gdzie $\bar{x} \in X$, otrzymujemy

$$PV^2(x) \leqslant (aV(x) + b)^2, \quad x \in X.$$

- Założenia **(B0)-(B4)** sprawdzamy dla $F = X^2$ oraz

$$Q((x, y), C) := \int_{\mathbf{T}} \int_{B_H(0,\varepsilon)} \mathbb{1}_C\left(\mathcal{W}(t, x) + h, \mathcal{W}(t, y) + h\right) \mathbf{p}(t, x, y)\, \nu^{\varepsilon}(dh)\, dt,$$

gdzie $\mathbf{p}(t, x, y) := \min(p(x, t), p(y, t))$.

$$\textbf{(A1)} \Rightarrow \textbf{(B1)} \quad (\textit{dla} \;\; q := \sqrt{\bar{q}})$$

$$\textbf{(A1)} \textit{ oraz } \textbf{(A3)} \Rightarrow \textbf{(B2)}$$

$$\textbf{(A1)} \textit{ oraz } \textbf{(A2)} \Rightarrow \textbf{(B3)}$$

Twierdzenie

Załóżmy, że funkcje $\mathcal{W}$ i p spełniają warunki **(A1)-(A3)** oraz rozważmy łańcuch Markowa

$$X_{n+1} = \mathcal{W}(\Delta\tau_{n+1}, X_n) + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

z dowolnym rozkładem początkowym $\mu \in \mathcal{P}_1^V(X)$. Wówczas, dla każdej funkcji $f \in BL(X)$, ciąg $\{f(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia tezę CTG. W przypadku gdy $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest łańcuchem stacjonarnym, dla wspomnianego ciągu zachodzi również zasada Donskera.