Letnia Szkoła Instytutu Matematyki
Brenna, 24-28 wrzesień 2018

Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha i jej konsekwencje

Andrzej Olbryś

Uniwersytet Śląski w Katowicach

25 września 2018

Wprowadzenie

Wyniki prezentowane w referacie pochodzą z pracy:

A. Olbryś, Zs. Páles, *Support theorems in abstract settings*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), no. 1-2, 215-240.

Bezpośrednią motywacją była praca:

A. Olbryś, *A support theorem for delta (s,t)-convex mappings*, Aequationes Math. 89 (2015), no. 3, 937–948.

Wprowadzenie

Wyniki prezentowane w referacie pochodzą z pracy:

A. Olbryś, Zs. Páles, *Support theorems in abstract settings*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), no. 1-2, 215-240.

Bezpośrednią motywacją była praca:

A. Olbryś, *A support theorem for delta (s,t)-convex mappings*, Aequationes Math. 89 (2015), no. 3, 937–948.

Wprowadzenie

Niech $(X, \|\cdot\|)$, $(E, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem wypukłym, $s, t \in (0,1)$ ustalonymi liczbami.

Definicja

Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to E$ jest delta (s,t)-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeżeli dla wszelkich $x, y \in D$ spełniona jest nierówność:

$$\|tF(x) + (1-t)F(y) - F(sx + (1-s)y)\| \\ \leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(sx + (1-s)y).$$

Jeżeli $s = t$, to mówimy, że F jest delta t-wypukła. W przypadku, gdy $t = \frac{1}{2}$, to F nazywamy delta wypukłą w sensie Jensena z kontrolną funkcją f. Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla wszelkich $t \in (0,1)$ to mówimy, że F jest delta-wypukła z kontrolną funkcją f.

Wprowadzenie

Niech $(X, \|\cdot\|)$, $(E, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem wypukłym, $s, t \in (0,1)$ ustalonymi liczbami.

Definicja

Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to E$ jest delta (s,t)-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeżeli dla wszelkich $x, y \in D$ spełniona jest nierówność:

$$\begin{aligned}\|tF(x) + (1-t)F(y) - F(sx + (1-s)y)\| \\ \leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(sx + (1-s)y).\end{aligned}$$

Jeżeli $s = t$, to mówimy, że F jest delta t-wypukła. W przypadku, gdy $t = \frac{1}{2}$, to F nazywamy delta wypukłą w sensie Jensena z kontrolną funkcją f. Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla wszelkich $t \in (0,1)$ to mówimy, że F jest delta-wypukła z kontrolną funkcją f.

Definicja odwzorowań (s,t)-afinicznych

Niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Odwzorowanie $A : D \to E$ nazywamy (s,t)-afinicznym, jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$A(sx + (1-s)y) = tA(x) + (1-t)A(y), \quad x, y \in D.$$

Twierdzenie. [A.O. 2015]

Niech $D \subset X$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. Wówczas odwzorowanie $F : D \to E$ jest delta (s,t)-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieją takie odwzorowania (s,t)-afiniczne $A_y : D \to E$ oraz $a_y : D \to \mathbb{R}$, że

$$\|F(x) - A_y(x)\| \leq f(x) - a_y(x) \quad \text{dla } x \in D$$

oraz

$$A_y(y) = F(y), \quad a_y(y) = f(y).$$

Definicja odwzorowań (s,t)-afinicznych

Niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Odwzorowanie $A : D \to E$ nazywamy (s,t)-afinicznym, jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$A(sx + (1-s)y) = tA(x) + (1-t)A(y), \quad x, y \in D.$$

Twierdzenie. [A.O. 2015]

Niech $D \subset X$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. Wówczas odwzorowanie $F : D \to E$ jest delta (s,t)-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieją takie odwzorowania (s,t)-afiniczne $A_y : D \to E$ oraz $a_y : D \to \mathbb{R}$, że

$$\|F(x) - A_y(x)\| \leq f(x) - a_y(x) \quad \text{dla } x \in D$$

oraz

$$A_y(y) = F(y), \quad a_y(y) = f(y).$$

Dla rzeczywistej przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|)$ rozpatrzmy przestrzeń liniową $\bar{E} := E \times \mathbb{R}$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary po współrzędnych. Przypomnijmy, że dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ zbiór postaci:

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{(x, t) \in \bar{E} : \ \varepsilon\|x\| \leq t\}$$

nazywamy stożkiem Lorentza. Stożek ten indukuje w $\bar{E}$ częściowy porządek, w następujący sposób:

$$(x_1, t_1) \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} (x_2, t_2) \Leftrightarrow \varepsilon\|x_2 - x_1\| \leq t_2 - t_1 .$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\bar{E}$, tzn.

- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow x + z \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y + z \quad$ dla $x, y, z \in \bar{E}$,
- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow \alpha x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} \alpha y \quad$ dla $x, y \in \bar{E}$, $\alpha \geq 0$.

Dla rzeczywistej przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|)$ rozpatrzmy przestrzeń liniową $\bar{E} := E \times \mathbb{R}$ z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary po współrzędnych. Przypomnijmy, że dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ zbiór postaci:

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{(x, t) \in \bar{E} : \ \varepsilon\|x\| \leq t\}$$

nazywamy stożkiem Lorentza. Stożek ten indukuje w $\bar{E}$ częściowy porządek, w następujący sposób:

$$(x_1, t_1) \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} (x_2, t_2) \Leftrightarrow \varepsilon\|x_2 - x_1\| \leq t_2 - t_1 .$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\bar{E}$, tzn.

- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow x + z \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y + z$ dla $x, y, z \in \bar{E}$,
- $x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} y \Rightarrow \alpha x \preceq_{\mathcal{K}_\varepsilon} \alpha y$ dla $x, y \in \bar{E}$, $\alpha \geq 0$.

Zauważmy, że określając dla danych funkcji $F : D \to E$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ odwzorowanie $\bar{F} : D \to \bar{E}$ wzorem:

$$\bar{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in D,$$

możemy przepisać nierówność definiującą funkcje delta (s, t)-wypukłe w postaci:

$$\bar{F}(sx + (1-s)y) \preceq_{\mathcal{K}_1} t\bar{F}(x) + (1-t)\bar{F}(y), \quad x, y \in D.$$

Niech X będzie niepustym zbiorem, $m \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathcal{P}^m(X)$ oznaczać będziemy rodzinę takich par (σ, s), że $\sigma : X^m \to X$ jest funkcją, ponadto istnieją $s_0 \in \mathbb{R}$ oraz takie $s_1, \ldots, s_m \in [0, \infty)$, że $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest funkcją afiniczną postaci:

$$s(y_1, \ldots, y_m) := s_0 + s_1 y_1 + \ldots + s_m y_m.$$

Niech $\mathcal{P}(X) := \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^m(X)$ oraz niech $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ będzie ustalonym podzbiorem. Oznaczmy symbolem

$$\Pi^m := \Pi \cap \mathcal{P}^m(X), \ m \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie Rodé

Niech X będzie niepustym zbiorem, $m \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathcal{P}^m(X)$ oznaczać będziemy rodzinę takich par (σ, s), że $\sigma : X^m \to X$ jest funkcją, ponadto istnieją $s_0 \in \mathbb{R}$ oraz takie $s_1, \dots, s_m \in [0, \infty)$, że $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest funkcją afiniczną postaci:

$$s(y_1, \dots, y_m) := s_0 + s_1 y_1 + \dots + s_m y_m.$$

Niech $\mathcal{P}(X) := \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^m(X)$ oraz niech $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ będzie ustalonym podzbiorem. Oznaczmy symbolem

$$\Pi^m := \Pi \cap \mathcal{P}^m(X), \;\; m \in \mathbb{N}.$$

Definicja

Powiemy, że rodzina Π jest *komutująca*, jeżeli dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}, (\sigma, s) \in \Pi^m, (\tau, u) \in \Pi^n$ mamy:

$$\begin{aligned}\sigma(\tau(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, \tau(x_1^m, \dots, x_n^m)) \\ = \tau(\sigma(x_1^1, \dots, x_1^m), \dots, \sigma(x_n^1, \dots, x_n^m))\end{aligned}$$

dla wszelkich $x_i^j \in X,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$ oraz

$$\begin{aligned}s(u(y_1^1, \dots, y_n^1), \dots, u(y_1^m, \dots, y_n^m)) \\ = u(s(y_1^1, \dots, y_1^m), \dots, s(y_n^1, \dots, y_n^m))\end{aligned}$$

dla wszelkich $y_i^j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$.

Twierdzenie Rodé

Definicja

Powiemy, że funkcja $f : X \to [-\infty, \infty)$ jest Π-*wypukła*, jeżeli

$$f(\sigma(x_1, \ldots, x_m)) \leq s_0 + s_1 f(x_1) + \ldots + s_m f(x_m),$$

dla wszelkich $m \in \mathbb{N}$, $(\sigma, s) \in \Pi^m$ oraz $x_1, \ldots, x_m \in X$; f jest Π-*wklęsła* jeżeli funkcja $-f$ jest Π-wypukła. Jeżeli f jest jednocześnie Π-wypukła i Π-wklęsła, to mówimy, że jest Π-*afiniczna*.

Twierdzenie (Rodé, 1978)

Niech $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ będzie rodziną komutującą, $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Π-wypukłą oraz

$$M(\Pi, f) := \{g : X \to [-\infty, \infty) \mid g \text{ jest } \Pi\text{-wklęsła oraz } g \leq f\}.$$

Wówczas każdy element maksymalny rodziny $M(\Pi, f)$ jest funkcją Π-afiniczną.

Twierdzenie Rodé

Definicja

Powiemy, że funkcja $f : X \to [-\infty, \infty)$ jest Π-*wypukła*, jeżeli

$$f(\sigma(x_1, \ldots, x_m)) \leq s_0 + s_1 f(x_1) + \ldots + s_m f(x_m),$$

dla wszelkich $m \in \mathbb{N}$, $(\sigma, s) \in \Pi^m$ oraz $x_1, \ldots, x_m \in X$; f jest Π-*wklęsła* jeżeli funkcja $-f$ jest Π-wypukła. Jeżeli f jest jednocześnie Π-wypukła i Π-wklęsła, to mówimy, że jest Π-*afiniczna*.

Twierdzenie (Rodé, 1978)

Niech $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ będzie rodziną komutującą, $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Π-wypukłą oraz

$$M(\Pi, f) := \{g : X \to [-\infty, \infty) \mid g \text{ jest } \Pi\text{-wklęsła oraz } g \leq f\}.$$

Wówczas każdy element maksymalny rodziny $M(\Pi, f)$ jest funkcją Π-afiniczną.

Niech Γ oraz X będą niepustymi zbiorami, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$ daną funkcją. Załóżmy, że mamy daną rodzinę ω operacji określonych na zbiorze X:

$$\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Definicja

Powiemy, że zbiór $E \subset X$ jest *ω-wypukły*, jeśli

$$\omega_\gamma(E^{n(\gamma)}) \subset E \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma,$$

tzn. dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$, $x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in E$ wartość $\omega(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)}) \in E$. Rodzinę wszystkich ω-wypukłych podzbiorów zbioru X oznaczamy symbolem $\mathcal{C}_\omega(X)$.

Niech Γ oraz X będą niepustymi zbiorami, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$ daną funkcją. Załóżmy, że mamy daną rodzinę ω operacji określonych na zbiorze X:

$$\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Definicja

Powiemy, że zbiór $E \subset X$ jest *ω-wypukły*, jeśli

$$\omega_\gamma(E^{n(\gamma)}) \subset E \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma,$$

tzn. dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$, $x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in E$ wartość $\omega(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)}) \in E$. Rodzinę wszystkich ω-wypukłych podzbiorów zbioru X oznaczamy symbolem $\mathcal{C}_\omega(X)$.

Definicja

Mówimy, że zbiór $E \subset X$ jest *ω-ekstremalny*, jeżeli

$$\omega_\gamma^{-1}(E) \subset E^{n(\gamma)} \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma,$$

tzn. dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$, $x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in X$ takich, że $\omega(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)}) \in E$ mamy $x_i \in E$ dla $i = 1, \ldots, n(\gamma)$. Rodzinę wszystkich ω-ekstremalnych podzbiorów zbioru X oznaczamy symbolem $\mathcal{E}_\omega(X)$

Przykłady

1) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, [0,1]\}.$$

2) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = xy$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \bigcup_{p \in [0,1]} \{[p,1], (p,1]\}.$$

Definicja

Mówimy, że zbiór $E \subset X$ jest *ω-ekstremalny*, jeżeli

$$\omega_\gamma^{-1}(E) \subset E^{n(\gamma)} \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma,$$

tzn. dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$, $x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X$ takich, że $\omega(x_1, \dots, x_{n(\gamma)}) \in E$ mamy $x_i \in E$ dla $i = 1, \dots, n(\gamma)$. Rodzinę wszystkich ω-ekstremalnych podzbiorów zbioru X oznaczamy symbolem $\mathcal{E}_\omega(X)$

Przykłady

1) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, [0,1]\}.$$

2) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = xy$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \bigcup_{p \in [0,1]} \{[p,1], (p,1]\}.$$

Definicja

Mówimy, że zbiór $E \subset X$ jest *ω-ekstremalny*, jeżeli

$$\omega_\gamma^{-1}(E) \subset E^{n(\gamma)} \quad \text{dla } \gamma \in \Gamma,$$

tzn. dla wszelkich $\gamma \in \Gamma$, $x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in X$ takich, że $\omega(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)}) \in E$ mamy $x_i \in E$ dla $i = 1, \ldots, n(\gamma)$. Rodzinę wszystkich ω-ekstremalnych podzbiorów zbioru X oznaczamy symbolem $\mathcal{E}_\omega(X)$

Przykłady

1) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, [0,1]\big\}.$$

2) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = xy$. Wówczas

$$\mathcal{E}_\omega(X) = \bigcup_{p \in [0,1]} \big\{[p,1], (p,1]\big\}.$$

ω-ekstremalna otoczka

Dla dowolnego zbioru $H \subset X$ ω-ekstremalną otoczkę zbioru H, oznaczamy symbolem $\mathrm{ext}_\omega(H)$. Jest to najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór ω-ekstremalny zawierający H:

$$ext_\omega(H) := \bigcap\{E \in \mathcal{E}_\omega(X) \mid H \subset E\}.$$

Przykłady

1) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\mathrm{ext}_\omega(\{0\}) = \{0\}, \quad \mathrm{ext}_\omega(\{1\}) = \{1\}, \quad \mathrm{ext}_\omega(\{p\}) = [0,1] \quad (p \in (0,1)).$$

2) Niech $X := [0,1]$ oraz $\omega(x,y) = xy$. Wówczas

$$\mathrm{ext}_\omega(\{p\}) = [p,1] \qquad (p \in [0,1]).$$

ω-ekstremalna otoczka

Dla dowolnego zbioru $H \subset X$ ω-ekstremalną otoczkę zbioru H, oznaczamy symbolem $\mathrm{ext}_\omega(H)$. Jest to najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór ω-ekstremalny zawierający H:

$$ext_\omega(H) := \bigcap \{E \in \mathcal{E}_\omega(X) \mid H \subset E\}.$$

Przykłady

1) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\mathrm{ext}_\omega(\{0\}) = \{0\}, \quad \mathrm{ext}_\omega(\{1\}) = \{1\}, \quad \mathrm{ext}_\omega(\{p\}) = [0, 1] \quad (p \in (0, 1)).$$

2) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = xy$. Wówczas

$$\mathrm{ext}_\omega(\{p\}) = [p, 1] \qquad (p \in [0, 1]).$$

ω-ekstremalna otoczka

Dla dowolnego zbioru $H \subset X$ ω-ekstremalną otoczkę zbioru H, oznaczamy symbolem $\text{ext}_\omega(H)$. Jest to najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór ω-ekstremalny zawierający H:

$$ext_\omega(H) := \bigcap \{E \in \mathcal{E}_\omega(X) \mid H \subset E\}.$$

Przykłady

1) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas

$$\text{ext}_\omega(\{0\}) = \{0\}, \quad \text{ext}_\omega(\{1\}) = \{1\}, \quad \text{ext}_\omega(\{p\}) = [0, 1] \quad (p \in (0, 1)).$$

2) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = xy$. Wówczas

$$\text{ext}_\omega(\{p\}) = [p, 1] \qquad (p \in [0, 1]).$$

ω-algebraiczne wnętrze

Mówimy, że punkt $p \in X$ jest punktem *ω-wewnętrznym* zbioru X, jeżeli $ext_\omega(\{p\}) = X$. Zbiór wszystkich ω-wewnętrznych punktów zbioru X nazywamy *ω-wnętrzem* zbioru X i oznaczamy symbolem $int_\omega(X)$. Dopełnienie zbioru $int_\omega(X)$ nazywamy *ω-brzegiem* zbioru X i oznaczamy symbolem:

$$\partial_\omega(X) := X \setminus int_\omega(X).$$

Przykłady

1) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < p < 1$.

2) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = xy$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 0$.

ω-algebraiczne wnętrze

Mówimy, że punkt $p \in X$ jest punktem *ω-wewnętrznym* zbioru X, jeżeli $ext_\omega(\{p\}) = X$. Zbiór wszystkich ω-wewnętrznych punktów zbioru X nazywamy *ω-wnętrzem* zbioru X i oznaczamy symbolem $int_\omega(X)$. Dopełnienie zbioru $int_\omega(X)$ nazywamy *ω-brzegiem* zbioru X i oznaczamy symbolem:

$$\partial_\omega(X) := X \setminus int_\omega(X).$$

Przykłady

1) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < p < 1$.

2) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = xy$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 0$.

ω-algebraiczne wnętrze

Mówimy, że punkt $p \in X$ jest punktem *ω-wewnętrznym* zbioru X, jeżeli $ext_\omega(\{p\}) = X$. Zbiór wszystkich ω-wewnętrznych punktów zbioru X nazywamy *ω-wnętrzem* zbioru X i oznaczamy symbolem $int_\omega(X)$. Dopełnienie zbioru $int_\omega(X)$ nazywamy *ω-brzegiem* zbioru X i oznaczamy symbolem:

$$\partial_\omega(X) := X \setminus int_\omega(X).$$

Przykłady

1) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < p < 1$.

2) Niech $X := [0, 1]$ oraz $\omega(x, y) = xy$. Wówczas $p \in X$ jest punktem ω-wewnętrznym wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 0$.

Dystrybutywność rodziny operacji

Mówimy, że rodzina odwzorowań $\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ jest parami dystrybutywna, jeżeli dla dowolnych $\gamma, \beta \in \Gamma,\ k \in \{1, 2, \ldots, n(\gamma)\}$ oraz wszelkich $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}, y_1, \ldots, y_{n(\beta)} \in X$ mamy:

$$\begin{aligned} &\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, \omega_\beta(y_1, \ldots, y_{n(\beta)}), x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}) \\ &= \omega_\beta(\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}), \ldots, \\ &\qquad \omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_{n(\beta)}, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)})). \end{aligned}$$

Refleksywność operacji

Niech $\omega : X^n \to X$. Mówimy, że ω jest refleksywna jeżeli dla wszelkich $x \in X$,

$$\omega(x, \ldots, x) = x.$$

Dystrybutywność rodziny operacji

Mówimy, że rodzina odwzorowań $\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ jest parami dystrybutywna, jeżeli dla dowolnych $\gamma, \beta \in \Gamma,\ k \in \{1, 2, \ldots, n(\gamma)\}$ oraz wszelkich $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}, y_1, \ldots, y_{n(\beta)} \in X$ mamy:

$$\begin{aligned} &\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, \omega_\beta(y_1, \ldots, y_{n(\beta)}), x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}) \\ &= \omega_\beta(\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)}), \ldots, \\ &\qquad \omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_{n(\beta)}, x_{k+1}, \ldots, x_{n(\gamma)})). \end{aligned}$$

Refleksywność operacji

Niech $\omega : X^n \to X$. Mówimy, że ω jest refleksywna jeżeli dla wszelkich $x \in X$,

$$\omega(x, \ldots, x) = x.$$

Zbiory częściowo-uporządkowane z własnością lcc

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Zbiór $L \subset Y$ nazywamy łańcuchem, jeżeli dla wszelkich $x, y \in Y$, $x \leq y$ lub $y \leq x$.

Powiemy, że $(Y, \leq)$ ma własność lcc (lower chain complete), jeśli dowolny niepusty i ograniczony z dołu łańcuch $L \subset Y$ posiada kres dolny.

Automorfizm porządkowy

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : Y \to Y$ jest automorfizmem porządkowym zbioru Y, jeśli φ jest bijekcją oraz dla wszelkich $x, y \in Y$ nierówność $x \leq y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Zbiory częściowo-uporządkowane z własnością lcc

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Zbiór $L \subset Y$ nazywamy łańcuchem, jeżeli dla wszelkich $x, y \in Y$, $x \leq y$ lub $y \leq x$.

Powiemy, że $(Y, \leq)$ ma własność lcc (lower chain complete), jeśli dowolny niepusty i ograniczony z dołu łańcuch $L \subset Y$ posiada kres dolny.

Automorfizm porządkowy

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : Y \to Y$ jest automorfizmem porządkowym zbioru Y, jeśli φ jest bijekcją oraz dla wszelkich $x, y \in Y$ nierówność $x \leq y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Zbiory częściowo-uporządkowane z własnością lcc

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Zbiór $L \subset Y$ nazywamy łańcuchem, jeżeli dla wszelkich $x, y \in Y$, $x \leq y$ lub $y \leq x$.
Powiemy, że $(Y, \leq)$ ma własność lcc (lower chain complete), jeśli dowolny niepusty i ograniczony z dołu łańcuch $L \subset Y$ posiada kres dolny.

Automorfizm porządkowy

Niech $(Y, \leq)$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym. Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : Y \to Y$ jest automorfizmem porządkowym zbioru Y, jeśli φ jest bijekcją oraz dla wszelkich $x, y \in Y$ nierówność $x \leq y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Niech $(Y, +)$ będzie grupą abelową. Każda podpółgrupa S grupy Y spełniająca warunki: $0 \in S$ oraz $S \cap (-S) \subset \{0\}$ indukuje częściowy porządek $\leq_S$ w Y w następujący sposób:

$$x \leq_S y \Leftrightarrow y - x \in S.$$

Tak zdefiniowany porządek jest zgodny z algebraiczną strukturą grupy Y, tzn. jeżeli $x \leq_S y$, to $x + z \leq_S y + z$ dla dowolnego $z \in S$. Trójkę $(Y, +, d)$ nazywamy *grupą z metryką*, jeśli $(Y, +)$ jest grupą, (Y, d) przestrzenią metryczną, przy czym metryka d jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{dla } x, y, z \in Y.$$

Metryka taka indukuje w naturalny sposób pseudonormę $\|\cdot\| : Y \to \mathbb{R}_+$ zadaną wzorem $\|x\|_d := d(x, 0)$. Ważną klasą półgrup, które mają własność *lcc* stanowią tzw. półgrupy addytywnie kontrolowane.

Niech $(Y, +)$ będzie grupą abelową. Każda podpółgrupa S grupy Y spełniająca warunki: $0 \in S$ oraz $S \cap (-S) \subset \{0\}$ indukuje częściowy porządek $\leq_S$ w Y w następujący sposób:

$$x \leq_S y \Leftrightarrow y - x \in S.$$

Tak zdefiniowany porządek jest zgodny z algebraiczną strukturą grupy Y, tzn. jeżeli $x \leq_S y$, to $x + z \leq_S y + z$ dla dowolnego $z \in S$.
Trójkę $(Y, +, d)$ nazywamy *grupą z metryką*, jeśli $(Y, +)$ jest grupą, (Y, d) przestrzenią metryczną, przy czym metryka d jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{dla } x, y, z \in Y.$$

Metryka taka indukuje w naturalny sposób pseudonormę $\|\cdot\| : Y \to \mathbb{R}_+$ zadaną wzorem $\|x\|_d := d(x, 0)$. Ważną klasą półgrup, które mają własność *lcc* stanowią tzw. półgrupy addytywnie kontrolowane.

Niech $(Y, +)$ będzie grupą abelową. Każda podpółgrupa S grupy Y spełniająca warunki: $0 \in S$ oraz $S \cap (-S) \subset \{0\}$ indukuje częściowy porządek $\leq_S$ w Y w następujący sposób:

$$x \leq_S y \Leftrightarrow y - x \in S.$$

Tak zdefiniowany porządek jest zgodny z algebraiczną strukturą grupy Y, tzn. jeżeli $x \leq_S y$, to $x + z \leq_S y + z$ dla dowolnego $z \in S$.
Trójkę $(Y, +, d)$ nazywamy *grupą z metryką*, jeśli $(Y, +)$ jest grupą, (Y, d) przestrzenią metryczną, przy czym metryka d jest niezmiennicza na przesunięcia, tzn.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{dla } x, y, z \in Y.$$

Metryka taka indukuje w naturalny sposób pseudonormę $\| \cdot \| : Y \to \mathbb{R}_+$ zadaną wzorem $\|x\|_d := d(x, 0)$. Ważną klasą półgrup, które mają własność *lcc* stanowią tzw. półgrupy addytywnie kontrolowane.

Definicja

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką. Mówimy, że podpółgrupa S grupy Y jest *addytywnie kontrolowana*, jeśli istnieje taka funkcja addytywna $a : Y \to \mathbb{R}$, że

$$\|y\|_d \leq a(y), \quad y \in S.$$

Twierdzenie

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką zupełną oraz niech S będzie taką addytywnie kontrolowaną, domkniętą podpółgrupą grupy Y, że $0 \in S$. Wówczas $(Y, \leq_S)$ ma własność *lcc*.

Niech $\mathcal{K}$ będzie stożkiem w przestrzeni unormowanej Y. Ze stożkiem tym związany jest tzw. stożek sprzężony określony następująco:

$$\mathcal{K}^\circ := \{\phi \in Y^\star : \phi(y) \geq 0, \; y \in \mathcal{K}\}.$$

Definicja

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką. Mówimy, że podpółgrupa S grupy Y jest *addytywnie kontrolowana*, jeśli istnieje taka funkcja addytywna $a : Y \to \mathbb{R}$, że

$$\|y\|_d \le a(y), \quad y \in S.$$

Twierdzenie

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką zupełną oraz niech S będzie taką addytywnie kontrolowaną, domkniętą podpółgrupą grupy Y, że $0 \in S$. Wówczas $(Y, \le_S)$ ma własność *lcc*.

Niech $\mathcal{K}$ będzie stożkiem w przestrzeni unormowanej Y. Ze stożkiem tym związany jest tzw. stożek sprzężony określony następująco:

$$\mathcal{K}^\circ := \{\phi \in Y^\star : \phi(y) \ge 0, \ y \in \mathcal{K}\}.$$

Definicja

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką. Mówimy, że podpółgrupa S grupy Y jest *addytywnie kontrolowana*, jeśli istnieje taka funkcja addytywna $a : Y \to \mathbb{R}$, że

$$\|y\|_d \leq a(y), \quad y \in S.$$

Twierdzenie

Niech $(Y, +, d)$ będzie grupą abelową z metryką zupełną oraz niech S będzie taką addytywnie kontrolowaną, domkniętą podpółgrupą grupy Y, że $0 \in S$. Wówczas $(Y, \leq_S)$ ma własność *lcc*.

Niech $\mathcal{K}$ będzie stożkiem w przestrzeni unormowanej Y. Ze stożkiem tym związany jest tzw. stożek sprzężony określony następująco:

$$\mathcal{K}^\circ := \{\phi \in Y^\star : \phi(y) \geq 0, \ y \in \mathcal{K}\}.$$

Definicja

Niech Y będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Stożek $\mathcal{K} \subset Y$ nazywamy ostrym, jeżeli $int(\mathcal{K}^{\circ}) \neq \emptyset$.

Wniosek

Niech $(Y, \leq_{\mathcal{K}})$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, a $\leq_{\mathcal{K}}$ porządkiem generowanym przez ostry, domknięty i wypukły stożek $\mathcal{K}$. Wówczas $(Y, \leq_{\mathcal{K}})$ ma własność lcc.

Przykłady

- w przestrzeni skończenie wymiarowej dowolny domknięty, wypukły taki stożek $\mathcal{K}$, że $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) \subset \{0\}$ jest ostry;
- dla dowolnego $\varepsilon > 0$ stożek Lorentza

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} := \{(x, t) \in Y \times \mathbb{R} : \ \varepsilon \|x\| \leq t\}$$

jest domknięty, ostry i wypukły w $Y \times \mathbb{R}$.

Definicja

Niech Y będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Stożek $\mathcal{K} \subset Y$ nazywamy ostrym, jeżeli $int(\mathcal{K}^{\circ}) \neq \emptyset$.

Wniosek

Niech $(Y, \leq_{\mathcal{K}})$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, a $\leq_{\mathcal{K}}$ porządkiem generowanym przez ostry, domknięty i wypukły stożek $\mathcal{K}$. Wówczas $(Y, \leq_{\mathcal{K}})$ ma własność lcc.

Przykłady

- w przestrzeni skończenie wymiarowej dowolny domknięty, wypukły taki stożek $\mathcal{K}$, że $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) \subset \{0\}$ jest ostry;
- dla dowolnego $\varepsilon > 0$ stożek Lorentza

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} := \{(x,t) \in Y \times \mathbb{R} : \ \varepsilon \|x\| \leq t\}$$

jest domknięty, ostry i wypukły w $Y \times \mathbb{R}$.

Definicja

Niech Y będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Stożek $\mathcal{K} \subset Y$ nazywamy ostrym, jeżeli $int(\mathcal{K}^\circ) \neq \emptyset$.

Wniosek

Niech $(Y, \leq_\mathcal{K})$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, a $\leq_\mathcal{K}$ porządkiem generowanym przez ostry, domknięty i wypukły stożek $\mathcal{K}$. Wówczas $(Y, \leq_\mathcal{K})$ ma własność lcc.

Przykłady

- w przestrzeni skończenie wymiarowej dowolny domknięty, wypukły taki stożek $\mathcal{K}$, że $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) \subset \{0\}$ jest ostry;
- dla dowolnego $\varepsilon > 0$ stożek Lorentza

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{(x, t) \in Y \times \mathbb{R} : \ \varepsilon\|x\| \leq t\}$$

jest domknięty, ostry i wypukły w $Y \times \mathbb{R}$.

Definicja

Niech Y będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Stożek $\mathcal{K} \subset Y$ nazywamy ostrym, jeżeli $int(\mathcal{K}^\circ) \neq \emptyset$.

Wniosek

Niech $(Y, \leq_\mathcal{K})$ będzie zbiorem częściowo-uporządkowanym, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, a $\leq_\mathcal{K}$ porządkiem generowanym przez ostry, domknięty i wypukły stożek $\mathcal{K}$. Wówczas $(Y, \leq_\mathcal{K})$ ma własność lcc.

Przykłady

- w przestrzeni skończenie wymiarowej dowolny domknięty, wypukły taki stożek $\mathcal{K}$, że $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) \subset \{0\}$ jest ostry;
- dla dowolnego $\varepsilon > 0$ stożek Lorentza

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{(x, t) \in Y \times \mathbb{R} : \ \varepsilon\|x\| \leq t\}$$

jest domknięty, ostry i wypukły w $Y \times \mathbb{R}$.

(ω, Ω)-wypukłość i (ω, Ω)-afiniczność

Załóżmy, że

(i) $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ są danymi rodzinami operacji.

(ii) X jest niepustym zbiorem ω-wypukłym oraz $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo-uporządkowanym;

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła, jeżeli spełnia nierówność

$$f\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) \leq \Omega_\gamma\big(f(x_1), \dots, f(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Mówimy, że funkcja $h : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wklęsła, jeżeli

$$h\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) \geq \Omega_\gamma\big(h(x_1), \dots, h(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Funkcję $g : X \to Y$ nazywamy (ω, Ω)-afiniczną jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$g\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) = \Omega_\gamma\big(g(x_1), \dots, g(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

(ω, Ω)-wypukłość i (ω, Ω)-afiniczność

Załóżmy, że

(i) $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ są danymi rodzinami operacji.

(ii) X jest niepustym zbiorem ω-wypukłym oraz $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo-uporządkowanym;

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła, jeżeli spełnia nierówność

$$f(\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)})) \leq \Omega_\gamma(f(x_1), \ldots, f(x_{n(\gamma)})), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Mówimy, że funkcja $h : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wklęsła, jeżeli

$$h(\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)})) \geq \Omega_\gamma(h(x_1), \ldots, h(x_{n(\gamma)})), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Funkcję $g : X \to Y$ nazywamy (ω, Ω)-afiniczną jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$g(\omega_\gamma(x_1, \ldots, x_{n(\gamma)})) = \Omega_\gamma(g(x_1), \ldots, g(x_{n(\gamma)})), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \ldots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

(ω,Ω)-wypukłość i (ω,Ω)-afiniczność

Załóżmy, że

(i) $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ są danymi rodzinami operacji.

(ii) X jest niepustym zbiorem ω-wypukłym oraz $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo-uporządkowanym;

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest (ω,Ω)-wypukła, jeżeli spełnia nierówność

$$f\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) \leq \Omega_\gamma\big(f(x_1),\dots,f(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma \in \Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)} \in X.$$

Mówimy, że funkcja $h : X \to Y$ jest (ω,Ω)-wklęsła, jeżeli

$$h\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) \geq \Omega_\gamma\big(h(x_1),\dots,h(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma \in \Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)} \in X.$$

Funkcję $g : X \to Y$ nazywamy (ω,Ω)-afiniczną jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$g\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) = \Omega_\gamma\big(g(x_1),\dots,g(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma \in \Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)} \in X.$$

(ω,Ω)-wypukłość i (ω,Ω)-afiniczność

Założmy, że

(i) $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ są danymi rodzinami operacji.

(ii) X jest niepustym zbiorem ω-wypukłym oraz $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo-uporządkowanym;

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest (ω,Ω)-wypukła, jeżeli spełnia nierówność

$$f\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) \leq \Omega_\gamma\big(f(x_1),\dots,f(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma\in\Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)}\in X.$$

Mówimy, że funkcja $h : X \to Y$ jest (ω,Ω)-wklęsła, jeżeli

$$h\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) \geq \Omega_\gamma\big(h(x_1),\dots,h(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma\in\Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)}\in X.$$

Funkcję $g : X \to Y$ nazywamy (ω,Ω)-afiniczną jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$g\big(\omega_\gamma(x_1,\dots,x_{n(\gamma)})\big) = \Omega_\gamma\big(g(x_1),\dots,g(x_{n(\gamma)})\big),\ \gamma\in\Gamma;\ x_1,\dots,x_{n(\gamma)}\in X.$$

(ω, Ω)-wypukłość i (ω, Ω)-afiniczność

Załóżmy, że

(i) $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ są danymi rodzinami operacji.

(ii) X jest niepustym zbiorem ω-wypukłym oraz $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo-uporządkowanym;

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła, jeżeli spełnia nierówność

$$f\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) \leq \Omega_\gamma\big(f(x_1), \dots, f(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Mówimy, że funkcja $h : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wklęsła, jeżeli

$$h\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) \geq \Omega_\gamma\big(h(x_1), \dots, h(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

Funkcję $g : X \to Y$ nazywamy (ω, Ω)-afiniczną jeżeli spełnia równanie funkcyjne

$$g\big(\omega_\gamma(x_1, \dots, x_{n(\gamma)})\big) = \Omega_\gamma\big(g(x_1), \dots, g(x_{n(\gamma)})\big), \ \gamma \in \Gamma; \ x_1, \dots, x_{n(\gamma)} \in X.$$

–(s,t)-wypukłość
X-wypukły podzbiór rzeczywistej przestrzeni liniowej, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = tx + (1-t)y, \qquad \Omega_1(x,y) = sx + (1-s)y.$$

–klasyczna wypukłość
$Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = [0,1]$, $n(\gamma) = 2$, $\gamma \in \Gamma$, $\omega = \{\omega_\gamma : \gamma \in [0,1]\}$, $\Omega = \{\Omega_\gamma : \gamma \in [0,1]\}$, gdzie $\omega_\gamma : X^2 \to X$, $\Omega_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y, \qquad \Omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y.$$

–podaddytywność
$(X,+)$- półgrupa, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = x + y, \qquad \Omega_1(x,y) = x + y.$$

–(s,t)-wypukłość

X-wypukły podzbiór rzeczywistej przestrzeni liniowej, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = tx + (1-t)y, \qquad \Omega_1(x,y) = sx + (1-s)y.$$

–klasyczna wypukłość

$Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = [0,1]$, $n(\gamma) = 2$, $\gamma \in \Gamma$, $\omega = \{\omega_\gamma :\ \gamma \in [0,1]\}$, $\Omega = \{\Omega_\gamma :\ \gamma \in [0,1]\}$, gdzie $\omega_\gamma : X^2 \to X$, $\Omega_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y, \qquad \Omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y.$$

–podaddytywność

$(X,+)$- półgrupa, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = x + y, \qquad \Omega_1(x,y) = x + y.$$

–(s,t)-wypukłość
X-wypukły podzbiór rzeczywistej przestrzeni liniowej, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = tx + (1-t)y, \qquad \Omega_1(x,y) = sx + (1-s)y.$$

–klasyczna wypukłość
$Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = [0,1]$, $n(\gamma) = 2$, $\gamma \in \Gamma$, $\omega = \{\omega_\gamma : \ \gamma \in [0,1]\}$, $\Omega = \{\Omega_\gamma : \ \gamma \in [0,1]\}$, gdzie $\omega_\gamma : X^2 \to X$, $\Omega_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y, \qquad \Omega_\gamma(x,y) = \gamma x + (1-\gamma)y.$$

–podaddytywność
$(X,+)$- półgrupa, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1\}$, $n(1) = 2$, $\omega = \{\omega_1\}$, $\Omega = \{\Omega_1\}$, gdzie $\omega_1 : X^2 \to X$, $\Omega_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane są wzorami:

$$\omega_1(x,y) = x + y, \qquad \Omega_1(x,y) = x + y.$$

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

(H) Niech X będzie niepustym zbiorem, $(Y, \leq)$ przestrzenią częściowo uporządkowaną, $\Gamma \neq \emptyset$, $n : \Gamma \to \mathbb{N}$, a $\omega = \{\omega_\gamma : X^{n(\gamma)} \to X \mid \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\Omega = \{\Omega_\gamma : Y^{n(\gamma)} \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ rodzinami operacji.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia Hahna-Banacha]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2) rodzina ω składa się z operacji parami dystrybutywnych;

(H3) rodzina Ω składa się z takich operacji parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą, D niech będzie takim niepustym, ω-wypukłym podzbiorem zbioru X, że $ext_\omega(D) = X$ oraz $f|_D$ jest (ω, Ω)-afiniczna. Wówczas istnieje taka funkcja (ω, Ω)-afiniczna $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g|_D = f|_D$.

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie [Abstrakcyjna wersja twierdzenia o podpieraniu]

Załóżmy (H) oraz że spełnione są następujące warunki:

(H1+) $(Y, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym z własnością lcc;

(H2+) rodzina ω składa się z operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych;

(H3+) rodzina Ω składa się z takich operacji refleksywnych i parami dystrybutywnych, że dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ operacja Ω_γ jest automorfizmem porządkowym względem każdej zmiennej.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją (ω, Ω)-wypukłą. Wówczas dla dowolnego ω-wewnętrznego punktu $p \in X$ istnieje taka (ω, Ω)-afiniczna funkcja $g : X \to Y$, że $g \leq f$ oraz $g(p) = f(p)$.

Wniosek

Funkcja $f : X \to Y$ jest (ω, Ω)-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\{g_\gamma : X \to Y \mid \gamma \in \Gamma\}$ funkcji (ω, Ω)-afinicznych, że

$$f(x) = \sup\{g_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Twierdzenie. [A.O. 2015]

Niech D będzie otwartym i wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni unormowanej. Wówczas odwzorowanie $F : D \to E$ jest delta (s,t)-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieją takie odwzorowania (s,t)-afiniczne $A_y : D \to E$ oraz $a_y : D \to \mathbb{R}$, że

$$\|F(x) - A_y(x)\| \leq f(x) - a_y(x) \quad \text{dla } x \in D$$

oraz

$$A_y(y) = F(y), \quad a_y(y) = f(y).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1-s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1-t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:

$$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:
  $$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:

$$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)), \; x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \; \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:

$$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:

$$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:

$$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:
  $$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \le_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Szkic dowodu

- Połóżmy $X := D$ oraz $Y := E \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{F} : X \to Y$ wzorem $\bar{F}(x) = (F(x), f(x)),\ x \in X$
- Porządek częściowy jest generowany przez stożek Lorentza $\mathcal{K}_1$, który jak wiemy jest ostry.
- Rozpatrzmy rodziny operacji:
  $\omega = \{\omega_1\}, \quad \omega_1 : D^2 \to D, \quad \omega_1(x, y) = sx + (1 - s)y,$
  $\Omega = \{\Omega_1\}, \quad \Omega_1 : Y^2 \to Y, \quad \Omega_1(x, y) = tx + (1 - t)y.$
- Operacje ω_1 oraz Ω_1 są autodystrybutywne, refleksywne oraz Ω_1 jest automorfizmem porządkowym ze względu na każdą ze zmiennych.
- Z wypukłości zbioru D wnosimy, że jest on zbiorem ω-wypukłym.
- Każdy punkt otwartego zbioru D jest punktem ω-wewnętrznym.
- Ostatecznie wystaczy zastosować abstrakcyjną wersję twierdzenia o podpieraniu do nierówności:
  $$\bar{F}(\omega_1(x, y)) \leq_{\mathcal{K}_1} \Omega_1(\bar{F}(x)), \bar{F}(y)), \qquad (x, y \in D).$$

Wniosek [Twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań podaddytywnych]

Niech $(X, +)$ będzie półgrupą abelową, Y grupą abelową z metryką zupełną, częściowo-uporządkowaną przez relację $\leq_S$ generowaną przez taką addytywnie kontrolowaną półgrupę $S \subset Y$, że $0 \in S$. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tj.

$$f(x + y) \leq_S f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Załóżmy ponadto, że $p \in X$ oraz

(i) f(np)=nf(p) dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$,

(ii) dla dowolnego $x \in X$ istnieją $y \in X$ oraz takie $n \in \mathbb{N}$, że $x + y = np$.

Wówczas istnieje takie odwzorowanie addytywne $g : X \to Y$, że

$$g \leq_S f \quad \text{oraz} \quad g(p) = f(p).$$

Wniosek [Twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań podaddytywnych]

Niech $(X,+)$ będzie półgrupą abelową, Y grupą abelową z metryką zupełną, częściowo-uporządkowaną przez relację $\leq_S$ generowaną przez taką addytywnie kontrolowaną półgrupę $S \subset Y$, że $0 \in S$. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tj.

$$f(x+y) \leq_S f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Załóżmy ponadto, że $p \in X$ oraz

(i) f(np)=nf(p) dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$,

(ii) dla dowolnego $x \in X$ istnieją $y \in X$ oraz takie $n \in \mathbb{N}$, że $x + y = np$.

Wówczas istnieje takie odwzorowanie addytywne $g : X \to Y$, że

$$g \leq_S f \quad \text{oraz} \quad g(p) = f(p).$$

Wniosek [Twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań podaddytywnych]

Niech $(X, +)$ będzie półgrupą abelową, Y grupą abelową z metryką zupełną, częściowo-uporządkowaną przez relację $\leq_S$ generowaną przez taką addytywnie kontrolowaną półgrupę $S \subset Y$, że $0 \in S$. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tj.

$$f(x + y) \leq_S f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Załóżmy ponadto, że $p \in X$ oraz

(i) f(np)=nf(p) dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$,

(ii) dla dowolnego $x \in X$ istnieją $y \in X$ oraz takie $n \in \mathbb{N}$, że $x + y = np$.

Wówczas istnieje takie odwzorowanie addytywne $g : X \to Y$, że

$$g \leq_S f \quad \text{oraz} \quad g(p) = f(p).$$

Wniosek [Twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań podaddytywnych]

Niech $(X, +)$ będzie półgrupą abelową, Y grupą abelową z metryką zupełną, częściowo-uporządkowaną przez relację $\leq_S$ generowaną przez taką addytywnie kontrolowaną półgrupę $S \subset Y$, że $0 \in S$. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem podaddytywnym, tj.

$$f(x + y) \leq_S f(x) + f(y) \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Załóżmy ponadto, że $p \in X$ oraz

(i) f(np)=nf(p) dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$,

(ii) dla dowolnego $x \in X$ istnieją $y \in X$ oraz takie $n \in \mathbb{N}$, że $x + y = np$.

Wówczas istnieje takie odwzorowanie addytywne $g : X \to Y$, że

$$g \leq_S f \quad \text{oraz} \quad g(p) = f(p).$$

Literatura

- R. Badora, *On the Hahn-Banach theorem for groups*, Arch. Math. (Basel) 86 (2006), no. 6, 517-528.
- M. Balaj, *Sandwich theorems*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 8 (2001), 15-20.
- E. Berz, *Sublinear functions on* $\mathbb{R}$, Aequationes Math. 12 (1975), no. 2/3, 200-206.
- W. E. Bonnice, R. J. Silverman, *The Hahn-Banach theorem for finite dimensional spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 121 (1966), 210-222.
- W. E. Bonnice, R. J. Silverman, *The Hahn-Banach extension and the least upper bound properties are equivalent*, Proc. Amer. Math. Soc., 18, (1967), 843-849.
- G. Buskes, *The Hahn-Banach Theorem surveyed*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 327 (1993), 49 pp.

- B. Fuchssteiner, *Sandwich theorems and lattice semigroups*, J. Functional Analysis 16 (1974), 1-14.
- B. Fuchssteiner and W. Lusky, *Convex cones*, North-Holland Mathematics Studies, 56. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 82. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.
- H. König, *On the abstract Hahn-Banach theorem due to Rodé*, Aequationes Math. 34 (1987), no. 1, 89-95.
- N. Kuhn, *On the structure of* (s,t)*-convex functions*, General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986), 161–174, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 80, Birkhäuser, Basel, 1987.
- K. Nikodem, *On the support of midconvex operators*, Aequationes Math. 42 (1991), no. 2-3, 182-189.
- Zs. Páles, *Hahn-Banach theorem for separation of semigroups and its applications*, Aequationes Math. 37 (1989), no. 2-3, 141-161.

A. Olbryś, *A support theorem for delta (s,t)-convex mappings*, Aequationes Math. 89 (2015), no. 3, 937–948.

A. Olbryś, Zs. Páles, *Support theorems in abstract settings*, Publ. Math. Debrecen 93 (2018), no. 1-2, 215-240.

Zs. Páles, *Geometric versions of Rodé's theorem*, Rad. Mat. 8 (1992/98), no. 2, 217–229.

G. Rodé, *Eine abstrakte Version des Satzes von Hahn-Banach*, Arch. Math. (Basel) 31 (1978/79), no. 5, 474-481.

B. Rodriguez-Salinas, L. Bou, *A Hahn-Banach theorem for arbitrary vector spaces*, Boll. Un. Mat. Ital.(4) 10 (1974), 390-393.

R. J. Silverman, T. Yen, *The Hahn-Banach theorem and the least upper bound property*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 523-526.

T.-O. To, *On the Hahn-Banach extension property*, Canad. Math. Bull. 13 (1970), 9-13; corrections, ibid., 13 (1970), 526.

- T.-O. To, *The equivalence of the least upper bound property and the Hahn-Banach extension property in ordered linear spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 287-295.
- L. Veselý, L. Zajiček, *Delta-convex mappings between Banach spaces and applications*, Dissertationes Math. , Polish Scientific Publishers (289), Warszawa, 1989 .
- P. Volkmann, H. Weigel, *Systeme von Funktionalgleichungen*, Arch. Math. (Basel) 37 (1981), no. 5, 443–449.