Zbiory liczbowe widziane oczami topologa

Aleksander Błaszczyk

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego

Brenna, 25 wrzesień 2018

Zbiór liczb wymiernych

Fakt 1

Przestrzeń $\mathbb{N}$ liczb naturalnych z topologią dziedziczoną ze zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest dyskretna, bo każdy jej punkt jest izolowany, tzn. traktowany jako zbiór jednopunktowy jest zbiorem otwartym.

Twierdzenie 1 (Sierpiński 1920)

Każda przeliczalna przestrzeń metryzowalna bez punktów izolowanych jest homeomorficzna z przestrzenią $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych.

Lemma 1 (Cantor 1895)

Każdy przeliczalny zbiór liniowo uporządkowany w sposób gęsty bez elementu największego i najmniejszego jest izomorficzny z $\mathbb{Q}$.

Szkic dowodu twierdzenia Sierpińskiego.

W przeliczalnej i w sobie gęstej przestrzeni metrycznej X ustalmy bazę $\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Możemy zakładać, że zbiory V_n są domknięto-otwarte. Ponieważ każdy zbiór zwarty w sobie gęsty jest nieprzeliczalny, to każdy zbiór domknięto-otwarty w X jest sumą nieskończenie wielu (niepustych) zbiorów domknięto-otwartych parami rozłącznych. Można przy tym zakładać, ze każdy z nich jest zawarty lub rozłączny z ustalonym zbiorem V_n. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$ wybierzmy zbiór domknięto-otwarty $U_{i_1,\ldots,i_n} \subseteq X$ tak aby $\bigcup\{U_i\colon i \in \mathbb{Z}\} = X$ oraz

(a) $U_{i_1,\ldots,i_n} \subseteq V_n$ lub $U_{i_1,\ldots,i_n} \cap V_n = \emptyset$;

(b) jeśli $k \neq l$, to $U_{i_1,\ldots,i_n,k} \cap U_{i_1,\ldots,i_n,l} = \emptyset$;

(c) $\bigcup\{U_{i_1,\ldots,i_n,k}\colon k \in \mathbb{Z}\} = U_{i_1,\ldots,i_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

c.d.

Dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki ciąg $i(x) = (i_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb całkowitych, że $x \in U_{i_1,\ldots,i_n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem rodzina $\mathcal{B}(x) = \{U_{i_1,\ldots,i_n} \colon n \in \mathbb{N} \text{ i } (i_n)_{n=1}^{\infty} = x\}$ jest bazą lokalną w punkcie x. W szczególności mamy $i(x) \neq i(y)$ jeśli tylko $x \neq y$. Dla dowolnych $x, y \in X$, jeśli $i(x) = (i_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $i(y) = (j_n)_{n=1}^{\infty}$ to przyjmujemy

$$n(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} \colon i_n \neq j_n\}.$$

Porządek w zbiorze X określamy wzorem:

$$x \prec y \text{ jeśli } i_n < j_n, \text{ gdzie } n = n(x, y). \tag{$*$}$$

Okazuje się, że jest to porządek liniowy zgodny z porządkiem leksykograficznym w $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, który na mocy twierdzenie Cantora (czyli lematu) jest izomorficzny z $\mathbb{Q}$. Pozostaje sprawdzić, że topologia wyznaczona przez porządek $\prec$ jest identyczna z topologią na X.

$\square$

c.d.

To z kolei wynika z następujących równości:

$$(\leftarrow, x) = \bigcup\{U_k : k < i_1\} \cup \bigcup\left\{\bigcup\{U_{i_1,\ldots,i_n,k} : k < i_{n+1}\} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

i analogicznie

$$(x, \rightarrow) = \bigcup\{U_k : k > i_1\} \cup \bigcup\left\{\bigcup\{U_{i_1,\ldots,i_n,k} : k > i_{n+1}\} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

dla każdego $x \in X$.

$\square$

Wniosek 1

W przestrzeni metrycznej bez punktów izolowanych każdy podzbiór przeliczalny gęsty jest homeomorficzny z $\mathbb{Q}$.

Definicja 1

Przestrzeń Furstenberga jest to zbiór $\mathbb{Z}$ z topologią generowaną przez nieskończone postępy arytmetyczne, czyli zbiory postaci
$U_{a,b} = \{x \in \mathbb{Z}\colon (\exists n \in \mathbb{Z})(x = a + nb)\}$,
przy czym $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $b \neq 0$.

Zbiory $U_{a,b}$ są domknięto-otwarte. Przestrzeń Furstenberga jest więc zero-wymiarowa typu T_1 i ma bazę przeliczalną, a więc jest metryzowalna. Jest w sobie gęsta, bo zbiory $U_{a,b}$ są nieskończone i $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup\{U_{0,p}\colon p$ jest liczbą pierwszą$\}$.

Wniosek 2

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Wniosek 3

Przestrzeń Furstenberga jest homeomorficzna z $\mathbb{Q}$.

Zbiór liczb niewymiernych

Twierdzenie 2 (Aleksandrow – Urysohn 1928)

Każda metryzowalna w sposób zupełny zero-wymiarowa przestrzeń ośrodkowa bez punktów izolowanych, w której zbiory zwarte mają puste wnętrza, jest homeomorficzna z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Szkic dowodu.

Niech $\{\mathcal{P}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem nieskończonych pokryć złożonym z parami rozłącznych zbiorów domknięto-otwartych przestrzeni X, przy czym średnice elementów pokrycia $\mathcal{P}_n$ są nie większe niż n^{-1}. Ponadto niech $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie bazą w X. Indukcyjnie konstruujemy ciąg $\{\mathcal{R}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ nieskończonych pokryć złożonym z parami rozłącznych zbiorów domknięto–otwartych tak aby spełnione były następujące warunki: $\square$

c.d.

(a) dla każdego $V \in \mathcal{R}_n$ istnieje takie $W \in \mathcal{P}_n$, że $V \subseteq W$;

(b) dla każdego $V \in \mathcal{R}_{n+1}$ istnieje takie $W \in \mathcal{R}_n$, że $V \subseteq W$;

(c) dla każdego $V \in \mathcal{R}_n$ istnieje taka rodzina nieskończona $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}_{n+1}$, że $V = \bigcup \mathcal{Q}$;

(d) dla każdego $V \in \mathcal{R}_n$, $V \subseteq U_n$ lub $V \cap U_n = \emptyset$.

Elementy rodziny $\mathcal{R}_1$ numerujemy dowolnie liczbami naturalnym, a elementy rodziny $\mathcal{R}_n$ elementami zbioru $\{(i_1, \ldots, i_n) \colon i_j \in \mathbb{N}\}$ tak aby $U_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \subseteq U_{i_1,\ldots,i_n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Gdy rodziny $\mathcal{R}_n$ są już skonstruowane, to definiujemy homeomorfizm $h \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ wzorem

$$h((i_n)_{n=1}^{\infty}) = x \iff \{x\} = \bigcap \{U_{i_1,\ldots,i_n} \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

$\square$

Wniosek 4

Przestrzeń $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest homeomorficzna z przestrzenią $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zbiór Cantora

Definicja 2

Zbiór Cantora, to ogół tych punktów odcinka $[0, 1]$*, które w zapisie trójkowym nie mają jedynki.*

Fakt 2

Zbiór Cantora jest przestrzenią metryczna zwartą zero-wymiarową i nie ma punktów izolowanych.

Lemma 2

Każde dwie podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}$*, które są zwarte zero-wymiarowe i nie mają punktów izolowanych są homeomorficzne.*

Szkic dowodu.

Jeśli $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ spełniają założenie, to

$$\mathbb{R} \setminus X = \bigcup \mathcal{P} \text{ oraz } \mathbb{R} \setminus Y = \bigcup \mathcal{R},$$

przy czym $\mathcal{P}$ oraz $\mathcal{R}$ są rodzinami parami rozłącznych przedziałów otwartych uporządkowanych przez relację

$$U \prec V \iff (\forall x \in U)(\forall y \in V)(x < y).$$

Ponieważ zbiory X oraz Y są zwarte, nie zawierają przedziałów i nie mają punktów izolowanych, to zarówno $\mathcal{P}$ jak i $\mathcal{R}$ spełniają założenia twierdzenia Cantora, tzn. lematu 1. Istnieje więc izomorfizm $h\colon \mathcal{P} \to \mathcal{R}$. Dla każdego $U \in \mathcal{P}$ ustalamy homeomorfizm $f_U\colon U \to h(U)$. Funkcję $f\colon \bigcup \mathcal{P} \to \bigcup \mathcal{R}$ określamy wzorem $f = \bigcup\{f_U\colon U \in \mathcal{P}\}$, a homeomorfizm $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$g(x) = \sup\{f(a)\colon a \leqslant x \text{ oraz } a \in \bigcup \mathcal{P}\}. \qquad \square$$

Lemma 3

Każda zero–wymiarowa przestrzeń metryczna zwarta jest homeomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}$.

Szkic dowodu.

Jeśli $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest bazą w przestrzeni zwartej X złożoną ze zbiorów domknięto–otwartych, a f_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru U_n, to funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} f_n(x)$$

jest homeomorfizmem X na $f[X] \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie 3 (Brouwer 1910)

Każda zero–wymiarowa przestrzeń metryczna zwarta bez punktów izolowanych jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.

Wniosek 5

Przestrzeń $\{0,1\}^\omega$ *jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.*

Wniosek 6

Każda przestrzeń metryczna zwarta X *jest obrazem ciągłym zbioru Cantora.*

Dowód.

Wystarczy rozważyć rzutowanie z $X \times \{0,1\}^\omega$ na X i zauważyć, że $X \times \{0,1\}^\omega$ jest homeomorficzne ze zbiorem Cantora. $\square$

Przestrzenie $\mathbb{R}$, S^1 oraz $[0, 1]$

Definicja 3

Przestrzeń X jest spójna gdy jej jedynymi podzbiorami domknięto-otwartymi są X oraz $\emptyset$. Przestrzeń zwartą i spójną nazywamy kontinuum gdy ma więcej niż jeden punkt.

Definicja 4

Zbiór $A \subseteq X$ rozspaja przestrzeń spójną X jeśli $X \setminus A = U \cup V$, przy czym U i V są otwarte, rozłączne niepuste. Punkt $x \in X$ rozspaja gdy zbiór jednopunktowy $\{x\}$ rozspaja.

Twierdzenie 4 (Moore 1920)

Każde kontinuum ma przynajmniej dwa punkty, które nie rozspajają.

Twierdzenie 5 (Sierpiński 1917, Moore 1920)

Kontinuum metryczne ośrodkowe, w którym dokładnie dwa punkty nie rozspajają jest homeomorficzne z $[0, 1]$.

Twierdzenie 6 (Moore 1920)

Kontinuum metryczne, w którym żaden punkt nie rozspaja ale każdy zbiór dwupunktowy rozspaja jest homeomorficzne z okręgiem S^1.

Twierdzenie 7

Lokalnie zwarta przestrzeń metryczna spójna i ośrodkowa, w której każdy punkt rozspaja jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$.

Przestrzeń $\beta\mathbb{N}$

Definicja 5

Zbiór $p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nazywamy ultrafiltrem gdy spełnione są warunki:

(a) $X \in p$ *oraz* $\emptyset \notin p$,

(b) $A \in p$ *oraz* $B \in p$ *pociąga* $A \cap B \in p$,

(c) $A \in p$ *oraz* $A \subseteq B$ *pociąga* $B \in p$,

(d) $A \cup B \in p$ *pociąga* $A \in p$ *lub* $B \in p$.

Twierdzenie 8 (Tarski)

Jeśli $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i dla dowolnych $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ zachodzi $F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$, to istnieje taki ultrafiltr $p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, który zawiera $\mathcal{F}$.

Definicja 6

Rozszerzenie Čecha–Stone'a zbioru liczb naturalnych jest to zbiór

$$\beta\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})\colon p \text{ jest ultrafiltrem oraz } \bigcap p = \emptyset\}$$

z topologia generowaną przez zbiory postaci

$$U \cup \{p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\colon U \in p\}.$$

Twierdzenie 9

Przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ jest zwarta, zero-wymiarowa i zawiera $\mathbb{N}$ jako podzbiór gęsty.

Twierdzenie 10

Jeśli przestrzeń zwarta X zawiera przeliczalny i gęsty zbiór punktów izolowanych, a zbiory rozłączne otwarte w X mają domknięcia rozłączne, to X jest homeomorficzna z $\beta\mathbb{N}$.

Hipoteza Jefimowa: każda nieskończona przestrzeń zwarta zawiera nietrywialny ciąg zbieżny lub $\beta\mathbb{N}$.

Twierdzenie 11 (Parovichenko 1963)

Załóżmy hipotezę continuum. Jeśli przestrzeń X zwarta zero-wymiarowa wagi continuum nie ma punktów izolowanych, jej niepuste podzbiory typu G_δ mają niepuste wnętrza, a rozłączne zbiory otwarte typu $F\sigma$ mają domknięcia rozłączne, to X jest homeomorficzne z $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Uwaga 1

W definicji rozszerzenia Čecha–Stone'a zbiór $\mathbb{N}$ można zastąpić dowolnym zbiorem nieskończonym S, tzn.

$$\beta S = S \cup \{p \subseteq \mathcal{P}(S) \colon p \text{ jest ultrafiltrem oraz } \bigcap p = \emptyset\}$$

z topologia generowaną przez zbiory postaci $U \cup \{p \in \beta S \setminus S \colon U \in p\}$.

Uwaga 2

Jeśli S jest zbiorem nieskończonym, to $\beta S \setminus S$ jest zero-wymiarową przestrzenią zwartą bez punktów izolowanych, w której niepuste podzbiory typu G_δ mają niepuste wnętrza, a rozłączne zbiory otwarte typu $F\sigma$ mają domknięcia rozłączne.

Problem katowicki: Czy to prawda, że jeśli $\beta S_1 \setminus S_1$ i $\beta S_2 \setminus S_2$ są homeomorficzne, to S_1 i S_2 są równoliczne? Jeśli $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ to odpowiedź jest negatywna.

Uwaga 3

Dla każdej permutacji $f\colon S \to S$ istnieje taki homeomorfizm $\beta f\colon \beta S \to \beta S$, że $\beta f \restriction S = f$ oraz $\beta f[\beta S \setminus S] = \beta S \setminus S$.

Twierdzenie 12 (Chodounsky – Dow – Hart – de Vries 2018)

Jeśli $|S| = \aleph_1$, a przestrzenie $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ i $\beta S \setminus S$ są homeomorficzne, to istnieje nietrywialny homeomorfizm na $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, tzn. taki, który nie jest wyznaczony przez żadną permutację na $\mathbb{N}$.

Uwaga 4

Istnienie homeomorfizmów na $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, które nie są wyznaczone przez żadną permutację na $\mathbb{N}$ jest niesprzeczne z aksjomatami ZFC.

Zastosowania

Definicja 7

Jeśli X jest przestrzenią zwartą, a G jest podgrupą grupy $Hom(X)$ wszystkich homeomorfizmów z X na X (z działaniem składania), to parę (X, G) nazywamy minimalnym układem dynamicznym gdy dla każdego $x \in X$ zbiór $\{g(x) \colon g \in G\}$ jest gęsty w X.

Lemma 4

Jeśli X jest zwarte, a $G \subseteq Hom(X)$ jest grupą, to istnieje taka podprzestrzeń zwarta $Y \subseteq X$, że $g[Y] = Y$ dla każdego $g \in G$ oraz $(Y, \{g \upharpoonright Y \colon g \in G\})$ jest minimalnym układem dynamicznym.

Przykład: Jeśli $X = \beta\mathbb{Z}$, a $G = \{\beta g_a \colon a \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $g_a(x) = a + x$, to przestrzeń Y, o której mówi lemat jest koabsolutna z kostką Cantora wagi continuum (Balcar + A.B.)

Twierdzenie 13 (A.B. + Plewik + Turek)

Jeśli (X, G) *jest minimalnym układem dynamicznym, to dla dowolnych* $g_1, \ldots, g_k \in G$ *i dowolnego zbioru otwartego niepustego* $U \subseteq X$ *istnieje takie* $n \in \mathbb{N}$*, że*

$$g_1^n[U] \cap \ldots \cap g_k^n[U] \neq \emptyset.$$

Wniosek 7 (Wielowymiarowe twierdzenie van der Waerdena)

Jeśli $\mathbb{N}^r = A_1 \cup \ldots \cup A_k$*, gdzie* $r \geqslant 1$*, to istnieje takie* $i \leqslant k$*, że dla każdego zbioru skończonego* $F \subseteq \mathbb{N}^r$ *istnieje takie* $a \in \mathbb{N}^r$ *i takie* $n \in N$*, że* $a + nF \subseteq A_i$*.*

Wniosek 8 (Twierdzenie van der Waerdena)

Jeśli zbiór liczb naturalnych podzielimy na skończenie wiele części, to jedna z nich będzie zawierała postępy arytmetyczne dowolnej długości.