Intuicjonistyczna Logika Kontrolna — złożoność obliczeniowa i własności fragmentów monadycznych

Anna Glenszczyk

Zakład Logiki Matematycznej

Letnia Szkoła
Instytutu Matematyki UŚ

Podlesice, 22-26 Września 2014

- logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie
- złożoność obliczeniowa
- połączenie logiki intuicjonistycznej i klasycznej — ICL
- własności fragmentów ICL

- logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie
- złożoność obliczeniowa
- połączenie logiki intuicjonistycznej i klasycznej — ICL
- własności fragmentów ICL

- logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie
- złożoność obliczeniowa
- połączenie logiki intuicjonistycznej i klasycznej — ICL
- własności fragmentów ICL

- logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie
- złożoność obliczeniowa
- połączenie logiki intuicjonistycznej i klasycznej — ICL
- własności fragmentów ICL

Intuicjonistyczna logika zdaniowa (IPC)

Język:

- atomy
- spójniki: $\wedge, \vee, \rightarrow$
- stałe: $\top$ (verum) oraz 0 (falsum)

- interpretacja spójników oparta na pojęciu konstrukcji (Brouwer-Heyting-Kolmogorow)
- semantyka: algebraiczna, topologiczna
- semantyka Kripkego - skończone drzewa
- IPC jest rozstrzygalna
- IPC jest PSPACE-zupełna (Statman, 1979)

Intuicjonistyczna logika zdaniowa (IPC)

Język:

- atomy
- spójniki: $\wedge, \vee, \rightarrow$
- stałe: $\top$ (verum) oraz 0 (falsum)

- interpretacja spójników oparta na pojęciu konstrukcji (Brouwer-Heyting-Kolmogorow)
- semantyka: algebraiczna, topologiczna
- semantyka Kripkego - skończone drzewa
- IPC jest rozstrzygalna
- IPC jest PSPACE-zupełna (Statman, 1979)

Intuitionistyczna Logika Kontrolna (ICL)

- izomorfizm Curry'ego-Howarda
- operatory kontrolne w programowaniu funkcyjnym
- połączenie logiki intuicjonistycznej i logiki klasycznej

ICL

Język:

- atomy
- spójniki: $\wedge, \vee, \rightarrow$
- stałe: $\top, 0, \bot$

Negacja intuicjonistyczna: $\sim A = A \rightarrow 0$

Negacja „klasyczna": $\neg A = A \rightarrow \bot$

Twierdzenie (Ekstensjonalność)

Dla każdej formuły $A(\bar{p}, s)$ oraz dla wszystkich formuł B, C jeżeli $\vdash B \leftrightarrow C$, to

$$\vdash A(\bar{p}, B/s) \leftrightarrow A(\bar{p}, C/s).$$

ICL

Język:

- atomy
- spójniki: $\wedge, \vee, \rightarrow$
- stałe: $\top, 0, \perp$

Negacja intuicjonistyczna: $\sim A = A \rightarrow 0$

Negacja „klasyczna”: $\neg A = A \rightarrow \perp$

Twierdzenie (Ekstensjonalność)

Dla każdej formuły $A(\bar{p}, s)$ oraz dla wszystkich formuł B, C jeżeli $\vdash B \leftrightarrow C$, to

$$\vdash A(\bar{p}, B/s) \leftrightarrow A(\bar{p}, C/s).$$

ICL

Język:

- atomy
- spójniki: $\wedge, \vee, \rightarrow$
- stałe: $\top, 0, \bot$

Negacja intuicjonistyczna: $\sim A = A \rightarrow 0$

Negacja „klasyczna”: $\neg A = A \rightarrow \bot$

Twierdzenie (Ekstensjonalność)

Dla każdej formuły $A(\bar{p}, s)$ oraz dla wszystkich formuł B, C jeżeli $\vdash B \leftrightarrow C$, to

$$\vdash A(\bar{p}, B/s) \leftrightarrow A(\bar{p}, C/s).$$

Semantyka kripkowska dla ICL

Model Kripkego oparty na skończonym drzewie (r-model):

$$\langle \mathrm{W}, \mathrm{r}, \preceq, \Vdash \rangle$$

gdzie

- W niepusty zbiór światów
- $\preceq$ częściowy porządek na W
- $\mathrm{r} \in \mathrm{W}$ korzeń drzewa ($\mathrm{r} \preceq \mathrm{u}$ dla każdego $\mathrm{u} \in \mathrm{W}$)
- $\Vdash$ przyporządkowuje światom zbiory formuł atomowych

Relacja forsowania $\Vdash$

$\Vdash$ jest monotoniczna: dla każdego $u, v \in W$ oraz atomu a

$$\text{jeżeli } u \preceq v, \text{ to } u \Vdash a \text{ pociąga } v \Vdash a$$

- $u \Vdash \top$; $u \nVdash 0$
- $u \Vdash A \wedge B$ iff $u \Vdash A$ oraz $u \Vdash B$
- $u \Vdash A \vee B$ iff $u \Vdash A$ lub $u \Vdash B$
- $u \Vdash A \rightarrow B$ iff dla każdego $v \succeq u$, $v \nVdash A$ lub $v \Vdash B$
- $r \nVdash \bot$
- $q \Vdash \bot$ dla każdego $q \succ r$

Falsum $\bot$ jest forsowane w każdym świecie powyżej korzenia r

Relacja forsowania $\Vdash$

$\Vdash$ jest monotoniczna: dla każdego $u, v \in W$ oraz atomu a

$$\text{jeżeli } u \preceq v, \text{ to } u \Vdash a \text{ pociąga } v \Vdash a$$

- $u \Vdash \top$; $u \nVdash 0$
- $u \Vdash A \wedge B$ iff $u \Vdash A$ oraz $u \Vdash B$
- $u \Vdash A \vee B$ iff $u \Vdash A$ lub $u \Vdash B$
- $u \Vdash A \to B$ iff dla każdego $v \succeq u$, $v \nVdash A$ lub $v \Vdash B$
- $r \nVdash \bot$
- $q \Vdash \bot$ dla każdego $q \succ r$

Falsum $\bot$ jest forsowane w każdym świecie powyżej korzenia r

Własności negacji

$\sim A = A \to 0$	$\neg A = A \to \perp$
$\sim\sim\sim A \equiv \sim A$	$\neg\neg\neg A \equiv \neg A$
$\not\models \sim\sim A \to A$	$\not\models \neg\neg A \to A$
$\not\models A \vee \sim A$	$\models A \vee \neg A$
$r \Vdash \sim A \iff \forall u \;\; r(u \Vdash A)$	$r \Vdash \neg A \iff r \nVdash A$
	$i \Vdash \neg A, \forall i \succ r$

Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Język:
  - zmienna p
  - negacje $\sim$, $\neg$
- model Kripkego $\langle W, r, \preceq, \Vdash \rangle$
- interpretacja negacji:
  - $u \Vdash \sim A$ wtw $w \nVdash A$, dla wszystkich $w \geq u$
  - $u \Vdash \neg A$ wtw $w \nVdash A$ lub $u \succ r$, dla wszystkich $w \geq u$

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\sim\sim\sim p$	$\sim\sim\sim\sim p$	$\sim\sim\sim\sim\sim p$	$\dots$
	$\neg p$	$\sim\neg p$	$\sim\sim\neg p$	$\sim\sim\sim\neg p$	$\sim\sim\sim\sim\neg p$	
		$\neg\sim p$	$\sim\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\sim p$	$\sim\sim\sim\neg\sim p$	
		$\neg\neg p$	$\sim\neg\neg p$	$\sim\sim\neg\neg p$	$\sim\sim\sim\neg\neg p$	
			$\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\sim\sim p$	$\sim\sim\neg\sim\sim p$	
			$\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\neg p$	$\sim\sim\neg\sim\neg p$	
			$\neg\neg\sim p$	$\sim\neg\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\neg\sim p$	
			$\neg\neg\neg p$	$\sim\neg\neg\neg p$	$\sim\sim\neg\neg\neg p$	
				$\neg\sim\sim\sim p$	$\sim\neg\sim\sim\sim p$	
				$\neg\sim\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\sim\neg p$	
				$\neg\sim\neg\sim p$	$\sim\neg\sim\neg\sim p$	
				$\neg\sim\neg\neg p$	$\sim\neg\sim\neg\neg p$	
				$\neg\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\neg\sim\sim p$	
				$\neg\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\neg\sim\neg p$	
				$\neg\neg\neg\sim p$	$\sim\neg\neg\neg\sim p$	
				$\neg\neg\neg\neg p$	$\sim\neg\neg\neg\neg p$	
					$\dots$	

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\cancel{\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim\sim p}$	...
	$\neg p$	$\sim\neg p$	$\sim\sim\neg p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim\neg p}$	
		$\neg\sim p$	$\sim\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\sim p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg\sim p}$	
		$\neg\neg p$	$\sim\neg\neg p$	$\sim\sim\neg\neg p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg\neg p}$	
			$\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\sim\sim p$	$\sim\sim\neg\sim\sim p$	
			$\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\neg p$	$\sim\sim\neg\sim\neg p$	
			$\neg\neg\sim p$	$\sim\neg\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\neg\sim p$	
			$\cancel{\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\sim\neg\neg\neg p}$	
				$\cancel{\neg\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\neg\sim\sim\sim p}$	
				$\neg\sim\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\sim\neg p$	
				$\neg\sim\neg\sim p$	$\sim\neg\sim\neg\sim p$	
				$\neg\sim\neg\neg p$	$\sim\neg\sim\neg\neg p$	
				$\neg\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\neg\sim\sim p$	
				$\neg\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\neg\sim\neg p$	
				$\cancel{\neg\neg\neg\sim p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg\sim p}$	
				$\cancel{\neg\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg\neg p}$	
					...	

Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Formuły postaci $N_k p$, gdzie N_k są wszystkimi możliwymi ciągami długości k o wyrazach $\sim, \neg$
- $A \not\equiv B$ wtw istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \not\models A \rightarrow B$ lub $\mathcal{M} \not\models B \rightarrow A$

Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Formuły postaci $N_k p$, gdzie N_k są wszystkimi możliwymi ciągami długości k o wyrazach $\sim, \neg$
- $A \not\equiv B$ wtw istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \not\models A \to B$ lub $\mathcal{M} \not\models B \to A$

Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

$\circ\ r \nVdash p$ $\bullet\ r \Vdash p$

Wysokości 2:

$$\begin{array}{ccc} \circ\ i \nVdash p & \bullet\ i \Vdash p & \bullet\ i \Vdash p \\ | & | & | \\ \circ\ r \nVdash p & \circ\ r \nVdash p & \bullet\ r \Vdash p \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \circ\ i \nVdash p \arrow[dr, dash] & & \bullet\ j \Vdash p \arrow[dl, dash] \\ & \circ\ r \nVdash p & \end{tikzcd}$$

Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

$\circ\ r \nVdash p$ $\qquad$ $\bullet\ r \Vdash p$

Wysokości 2:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\circ\ i \nVdash p \arrow[d] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d] \\
\circ\ r \nVdash p & \circ\ r \nVdash p & \bullet\ r \Vdash p
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\circ\ i \nVdash p \arrow[dr] & & \bullet\ j \Vdash p \arrow[dl] \\
& \circ\ r \nVdash p &
\end{tikzcd}$$

Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

$\circ\ r \nVdash p$ $\qquad$ $\bullet\ r \Vdash p$

Wysokości 2:

$\circ\ i \nVdash p$ $\qquad$ $\bullet\ i \Vdash p$ $\qquad$ $\bullet\ i \Vdash p$ $\qquad$ $\circ\ i \nVdash p$ $\qquad$ $\bullet\ j \Vdash p$

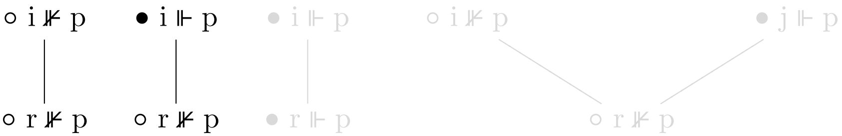
$\circ\ r \nVdash p$ $\qquad$ $\circ\ r \nVdash p$ $\qquad$ $\bullet\ r \Vdash p$ $\qquad$ $\circ\ r \nVdash p$

Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

∘ $r \nVdash p$ • $r \Vdash p$

Wysokości 2:



Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

$\circ\ r \nVdash p \qquad\qquad \bullet\ r \Vdash p$

Wysokości 2:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\circ\ i \nVdash p \arrow[d, dash] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d, dash] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d, dash] & \circ\ i \nVdash p \arrow[dr, dash] & & \bullet\ j \Vdash p \arrow[dl, dash] \\
\circ\ r \nVdash p & \circ\ r \nVdash p & \bullet\ r \Vdash p & & \circ\ r \nVdash p &
\end{tikzcd}$$

Możliwe modele Kripkego

Wysokości 1:

$$\circ\ r \nVdash p \qquad\qquad \bullet\ r \Vdash p$$

Wysokości 2:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\circ\ i \nVdash p \arrow[d] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d] & \bullet\ i \Vdash p \arrow[d] & \circ\ i \nVdash p \arrow[dr] & & \bullet\ j \Vdash p \arrow[dl] \\
\circ\ r \nVdash p & \circ\ r \nVdash p & \bullet\ r \Vdash p & & \circ\ r \nVdash p &
\end{tikzcd}$$

Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Formuły postaci $\mathrm{N_k p}$, gdzie $\mathrm{N_k}$ są wszystkimi możliwymi ciągami długości k o wyrazach $\sim, \neg$
- $A \not\equiv B$ wtw istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \not\models A \to B$ lub $\mathcal{M} \not\models B \to A$
- Istnieje 6 możliwych kontrmodeli dla formuł postaci

$$\mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$$

- Istnieje co najwyżej 2^5 nierównoważnych formuł negacyjnych
- Wystarczy sprawdzić tylko 32^2 formuł typu $\mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$...

Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Formuły postaci $\mathrm{N_k p}$, gdzie $\mathrm{N_k}$ są wszystkimi możliwymi ciągami długości k o wyrazach $\sim, \neg$
- $\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{B}$ wtw istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \not\models \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ lub $\mathcal{M} \not\models \mathrm{B} \to \mathrm{A}$
- Istnieje 6 możliwych kontrmodeli dla formuł postaci

$$\mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$$

- Istnieje co najwyżej 2^5 nierównoważnych formuł negacyjnych
- Wystarczy sprawdzić tylko 32^2 formuł typu $\mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$...

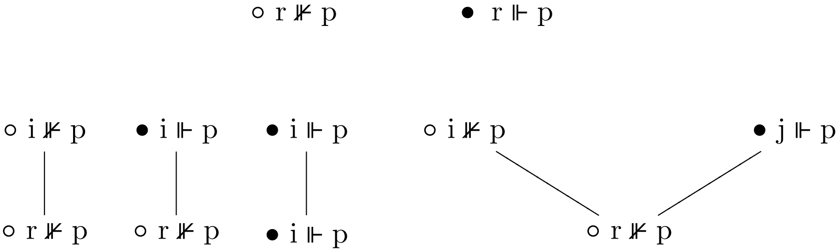
Monadyczny fragment negacyjny ICL

- Formuły postaci $\mathrm{N_k p}$, gdzie $\mathrm{N_k}$ są wszystkimi możliwymi ciągami długości k o wyrazach $\sim, \neg$
- $\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{B}$ wtw istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \not\models \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ lub $\mathcal{M} \not\models \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$
- Istnieje 6 możliwych kontrmodeli dla formuł postaci

$$\mathrm{N_k p} \rightarrow \mathrm{N_m p}$$

- Istnieje co najwyżej 2^5 nierównoważnych formuł negacyjnych
- Wystarczy sprawdzić tylko 32^2 formuł typu $\mathrm{N_k p} \rightarrow \mathrm{N_m p}$...

Możliwe modele Kripkego



Budowa kontrmodelu

$$\nvdash \mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p} \text{ wtw istnieje model } \mathcal{M} \text{ taki, że } \mathcal{M} \nvDash \mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$$

$$\text{wtw } \mathrm{r} \nVdash \mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p}$$

$$\text{wtw } \exists \mathrm{u} \geqslant \mathrm{r}(\mathrm{u} \Vdash \mathrm{N_k p} \text{ oraz } \mathrm{u} \nVdash \mathrm{N_m p})$$

$$\vdash \mathrm{N_k p} \to \mathrm{N_m p} \text{ wtw } \mathcal{S}^+(\mathrm{N_k p}) \subseteq \mathcal{S}^+(\mathrm{N_m p}),$$
gdzie $\mathcal{S}^+(\mathrm{A})$ jest zbiorem modeli dla danej formuły.

Modele dla formuł negacyjnych — przykłady

	○	●				V
p	-	+	-	-	+	-
$\sim\sim p$	-	+	-	+	+	-
$\sim\neg p$	-	+	-	-	-	-
$\neg\sim p$	-	+	-	+	+	+
$\neg\neg p$	-	+	-	-	+	-

Przykład 1

	$\circ$	$\bullet$	$\begin{array}{c}\circ\\ \vert\\ \circ\end{array}$	$\begin{array}{c}\bullet\\ \vert\\ \circ\end{array}$	$\begin{array}{c}\bullet\\ \vert\\ \bullet\end{array}$	V
p	-	+	-	-	+	-
$\sim\sim$p	-	+	-	+	+	-

$$\models p \to \sim\sim p$$

$$\not\models \sim\sim p \to p$$

Kontrmodel: $\begin{array}{c}\bullet\\ \vert\\ \circ\end{array}$

Przykład 2

	$\circ$	$\bullet$	$\begin{smallmatrix}\circ\\ \vert\\ \circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\bullet\\ \vert\\ \circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\bullet\\ \vert\\ \bullet\end{smallmatrix}$	V
p	-	+	-	-	+	-
¬¬p	-	+	-	-	+	-

$$\models p \to \neg\neg p$$

$$\not\models \neg\neg p \to p$$

Przykład 2

	$\circ$	$\bullet$	$\begin{smallmatrix}\circ\\ \vert\\ \circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\bullet\\ \vert\\ \circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\bullet\\ \vert\\ \bullet\end{smallmatrix}$	V
p	-	+	-	-	+	-
$\neg\neg p$	-	+	-	-	+	-

$$\models p \to \neg\neg p$$

$$\not\models \neg\neg p \to p$$

Pseudopodmodele

$$\mathcal{M} \not\models \neg\neg p \to p \iff r \nVdash \neg\neg p \to p$$

$$\iff \exists u \geqslant r(u \Vdash \neg\neg p \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u(u' \nVdash \neg p \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u((u' = r \text{ oraz } u' \Vdash p) \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

Pseudopodmodele

$$\mathcal{M} \not\models \neg\neg p \to p \iff r \nVdash \neg\neg p \to p$$

$$\iff \exists u \geqslant r(u \Vdash \neg\neg p \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u(u' \nVdash \neg p \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u((u' = r \text{ oraz } u' \Vdash p) \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$\circ$ $i \nVdash p$ $\bullet$ $i \Vdash p$

Pseudopodmodele

$$\mathcal{M} \not\models \neg\neg p \to p \iff r \nVdash \neg\neg p \to p$$

$$\iff \exists u \geqslant r(u \Vdash \neg\neg p \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u(u' \nVdash \neg p \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u((u' = r \text{ oraz } u' \Vdash p) \text{ lub } u' \Vdash \bot) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

Pseudopodmodele

$$\mathcal{M} \not\models \neg\neg p \rightarrow p \iff r \nVdash \neg\neg p \rightarrow p$$

$$\iff \exists u \geqslant r(u \Vdash \neg\neg p \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u(u' \nVdash \neg p \text{ lub } u' \Vdash \perp) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$$\iff \exists u \geqslant r(\forall u' \geqslant u((u' = r \text{ oraz } u' \Vdash p) \text{ lub } u' \Vdash \perp) \text{ oraz } u \nVdash p)$$

$\circ$ i $\nVdash p$ $\bullet$ i $\Vdash p$

Przykład 2

	$\circ$	$\bullet$	$\substack{\circ \\ \vert \\ \circ}$	$\substack{\bullet \\ \vert \\ \circ}$	$\substack{\bullet \\ \vert \\ \bullet}$	V	i($\circ$)	i($\bullet$)
p	-	+	-	-	+	-	-	+
$\neg\neg$p	-	+	-	-	+	-	+	+

$$\models p \rightarrow \neg\neg p$$

$$\not\models \neg\neg p \rightarrow p$$

Kontrmodele: $\substack{\circ \\ \vert \\ \circ}$, V

Własności formuł negacyjnych

Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

1. $\sim\neg N_{2k}p \equiv \sim\neg p$,
2. $\sim\neg N_{2k+1}p \equiv \sim\neg\neg p$,
3. $\sim\neg p \to N_{2m}p$,
4. $\sim\neg\neg p \to N_{2m+1}p$,
5. $N_{2k}p \to \sim\sim\neg\neg p$,
6. $N_{2k+1}p \to \sim\sim\neg p$,

Własności formuł negacyjnych

Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

1. $\sim\neg N_{2k}p \equiv \sim\neg p$,
2. $\sim\neg N_{2k+1}p \equiv \sim\neg\neg p$,
3. $\sim\neg p \to N_{2m}p$,
4. $\sim\neg\neg p \to N_{2m+1}p$,
5. $N_{2k}p \to \sim\sim\neg\neg p$,
6. $N_{2k+1}p \to \sim\sim\neg p$,

Własności formuł negacyjnych

Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

1. $\sim\neg N_{2k}p \equiv \sim\neg p$,
2. $\sim\neg N_{2k+1}p \equiv \sim\neg\neg p$,
3. $\sim\neg p \rightarrow N_{2m}p$,
4. $\sim\neg\neg p \rightarrow N_{2m+1}p$,
5. $N_{2k}p \rightarrow \sim\sim\neg\neg p$,
6. $N_{2k+1}p \rightarrow \sim\sim\neg p$,

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\cancel{\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim\sim p}$	$\dots$
	$\neg p$	$\sim\neg p$	$\sim\sim\neg p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg p}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim\neg p}$	
		$\neg\sim p$	$\sim\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\sim p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg\sim p}$	
		$\neg\neg p$	$\sim\neg\neg p$	$\sim\sim\neg\neg p$	$\cancel{\sim\sim\sim\neg\neg p}$	
			$\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\sim\sim p$	$\sim\sim\neg\sim\sim p$	
			$\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\neg p$	$\sim\sim\neg\sim\neg p$	
			$\neg\neg\sim p$	$\sim\neg\neg\sim p$	$\sim\sim\neg\neg\sim p$	
			$\cancel{\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\sim\neg\neg\neg p}$	
				$\cancel{\neg\sim\sim\sim p}$	$\cancel{\sim\neg\sim\sim\sim p}$	
				$\neg\sim\sim\neg p$	$\sim\neg\sim\sim\neg p$	
				$\neg\sim\neg\sim p$	$\sim\neg\sim\neg\sim p$	
				$\neg\sim\neg\neg p$	$\sim\neg\sim\neg\neg p$	
				$\neg\neg\sim\sim p$	$\sim\neg\neg\sim\sim p$	
				$\neg\neg\sim\neg p$	$\sim\neg\neg\sim\neg p$	
				$\cancel{\neg\neg\neg\sim p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg\sim p}$	
				$\cancel{\neg\neg\neg\neg p}$	$\cancel{\sim\neg\neg\neg\neg p}$	
					$\dots$	

$$
\begin{array}{ccccccc}
p & \sim p & \sim\sim p & \cancel{\sim\sim\sim p} & \cancel{\sim\sim\sim\sim p} & \cancel{\sim\sim\sim\sim\sim p} & \ldots \\
 & \neg p & \sim\neg p & \sim\sim\neg p & \cancel{\sim\sim\sim\neg p} & \cancel{\sim\sim\sim\sim\neg p} & \\
 & & \neg\sim p & \cancel{\sim\neg\sim p} & \cancel{\sim\sim\neg\sim p} & \cancel{\sim\sim\sim\neg\sim p} & \\
 & & \neg\neg p & \sim\neg\neg p & \sim\sim\neg\neg p & \cancel{\sim\sim\sim\neg\neg p} & \\
 & & & \neg\sim\sim p & \cancel{\sim\neg\sim\sim p} & \cancel{\sim\sim\neg\sim\sim p} & \\
 & & & \neg\sim\neg p & \cancel{\sim\neg\sim\neg p} & \cancel{\sim\sim\neg\sim\neg p} & \\
 & & & \neg\neg\sim p & \cancel{\sim\neg\neg\sim p} & \cancel{\sim\sim\neg\neg\sim p} & \\
 & & & \cancel{\neg\neg\neg p} & \cancel{\sim\neg\neg\neg p} & \cancel{\sim\sim\neg\neg\neg p} & \\
 & & & & \cancel{\neg\sim\sim\sim p} & \cancel{\sim\neg\sim\sim\sim p} & \\
 & & & & \neg\sim\sim\neg p & \cancel{\sim\neg\sim\sim\neg p} & \\
 & & & & \neg\sim\neg\sim p & \cancel{\sim\neg\sim\neg\sim p} & \\
 & & & & \neg\sim\neg\neg p & \cancel{\sim\neg\sim\neg\neg p} & \\
 & & & & \neg\neg\sim\sim p & \cancel{\sim\neg\neg\sim\sim p} & \\
 & & & & \neg\neg\sim\neg p & \cancel{\sim\neg\neg\sim\neg p} & \\
 & & & & \cancel{\neg\neg\neg\sim p} & \cancel{\sim\neg\neg\neg\sim p} & \\
 & & & & \cancel{\neg\neg\neg\neg p} & \cancel{\sim\neg\neg\neg\neg p} & \\
 & & & & & \ldots &
\end{array}
$$

Nieskracalne, nierównoważne formuły negacyjne

$$
\begin{array}{cccccc}
p & {\sim}p & {\sim}{\sim}p & {\sim}{\sim}\neg p & {\sim}{\sim}\neg\neg p & \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \\
 & \neg p & {\sim}\neg p & {\sim}\neg\neg p & \neg{\sim}{\sim}\neg p & \\
 & & \neg{\sim}p & \neg{\sim}{\sim}p & \neg\neg{\sim}{\sim}p & \\
 & & \neg\neg p & \neg\neg{\sim}p & &
\end{array}
$$

Lemat

Każda formuła negacyjna N_6p jest redukowalna do pewnej formuły negacyjnej N_kp, gdzie $k \leqslant 4$.

Twierdzenie

Każda formuła negacyjna N_kp, gdzie $k \geqslant 6$ jest redukowalna do pewnej formuły negacyjnej długości $m \leqslant 5$.

Lemat

Każda formuła negacyjna N_6p jest redukowalna do pewnej formuły negacyjnej N_kp, gdzie $k \leqslant 4$.

Twierdzenie

Każda formuła negacyjna N_kp, gdzie $k \geqslant 6$ jest redukowalna do pewnej formuły negacyjnej długości $m \leqslant 5$.

Twierdzenie

Następujące implikacje formuł negacyjnych długości parzystej są prawdziwe:

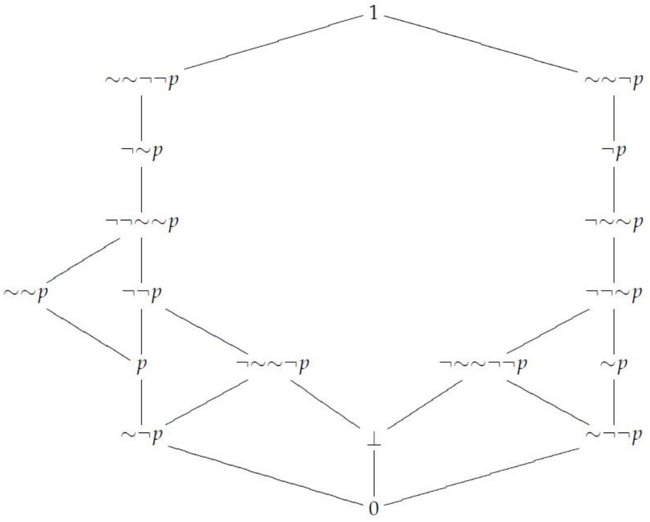
1. $\sim\neg p \to p$
2. $p \to \neg\neg p$
3. $\neg\neg p \to \neg\neg\sim\sim p$
4. $\neg\neg\sim\sim p \to \neg\sim p$
5. $\neg\sim p \to \sim\sim\neg\neg p$
6. $\sim\neg p \to \neg\sim\sim\neg p$
7. $\neg\sim\sim\neg p \to \neg\neg p$
8. $p \to \sim\sim p$
9. $\sim\sim p \to \neg\neg\sim\sim p$

Twierdzenie

Następujące implikacje formuł negacyjnych długości nieparzystej są prawdziwe:

1. $\sim\neg\neg p \rightarrow \sim p$
2. $\sim p \rightarrow \neg\neg\sim p$
3. $\neg\neg\sim p \rightarrow \neg\sim\sim p$
4. $\neg\sim\sim p \rightarrow \neg p$
5. $\neg p \rightarrow \sim\sim\neg p$
6. $\sim\neg\neg p \rightarrow \neg\sim\sim\neg\neg p$
7. $\neg\sim\sim\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\sim p$

Poset $(\mathcal{N}^* \cup \{0, \bot, 1\}, \leq)$



Pełność ICL względem semantyki Kripkego

Twierdzenie (Liang, Miller)

Formuła jest dowodliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w klasie wszystkich r-modeli.

Wniosek

Fragment zdaniowy ICL jest rozstrzygalny.

Hipoteza

Fragment zdaniowy ICL jest PSPACE-zupełny

Algorytm dla ICL

Procedura budowania korzenia modelu ICL:

$$\text{ICL-R}(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$$

Procedura budowania nowego świata modelu ICL:

$$\text{ICL-W}(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$$

gdzie

- $\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}$ zbiory formuł
- $\tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}$ zbiór par formuł
- $\tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}$ ciąg par formuł
- $\mathcal{L}$ ciąg znaczników

Algorytm dla ICL

procedure ICL-R($\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}$) :
begin
if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \nsubseteq$ VAR then
begin
1. choose A $\in (\mathcal{T} \cup \mathcal{F}) -$ VAR;
2. if A $= 0$ and A $\in \mathcal{T}$ then return false;
3. if A $= 0$ and A $\in \mathcal{F}$ then return
ICL-R($\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}$);
4. if A $=\perp$ and A $\in \mathcal{T}$ then return false;
5. if A $=\perp$ and A $\in \mathcal{F}$ then return
ICL-R($\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}$);
6. if A $= \top$ and A $\in \mathcal{T}$ then return
ICL-R($\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}$);
7. if A $= \top$ and A $\in \mathcal{F}$ then return false;
...

Algorytm dla ICL

8. if $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{T}$ then return
   $\text{ICL-R}((\mathcal{T} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$;
9. if $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{F}$ then return
   $\text{ICL-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}) \vee$
   $\text{ICL-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$;
10. if $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{T}$ then return
    $\text{ICL-R}((\mathcal{T} \cup \{B\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L}) \vee$
    $\text{ICL-R}((\mathcal{T} \cup \{C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$;
11. if $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{F}$ then return
    $\text{ICL-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\rightarrow}, \tilde{\mathcal{F}}_{\rightarrow}, \mathcal{L})$;

...

Plany na przyszłość

- Fragment $(0, 1, \perp, p, \rightarrow)$ ICL
- Szczegóły dowodu pełności procedury
- Algorytm dla PIL
- Dowód pełności procedury dla PIL

P i O

Dziękuję za uwagę!

- Dyckhoff R.: Contraction-free Sequent Calculi for Intuitionistic Logic. JSL 57 (3), 795–807, 1992
- Glenszczyk A.: Negational Fragment of Intuitionistic Control Logic, arXiv:1408.2129 [math.LO], preprint.
- Ladner R.: The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic. SIAM J. Comp. 6 (3), 467–480, 1977
- Liang Ch., Miller D.: An Intuitionistic Control Logic. To appear
- Liang Ch., Miller D.: Kripke Semantics and Proof Systems for Combining Intuitionistic Logic and Classical Logic. Ann. Pure Appl. Logic. 164 (2), 86–111, 2013
- Sorensen M.H., Urzyczyn P.: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, vol. 149, Elsevier, 2006