O równaniach funkcyjnych związanych z rozdzielnością implikacji rozmytych

Wanda Niemyska

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski

25.09.2014

Odczyt na Letniej Szkole IM, Podlesice 2014

Bibliografia

[1] M. Baczyński, W. Niemyska, T. Szostok: *On a functional equation related to distributivity of fuzzy implications*, In: 2013 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ IEEE 2013, Hyderabad, India, July 7-10, 2013), 1-5.

[2] M. Baczyński, W. Niemyska, T. Szostok: *On a functional equation related to the distributivity of fuzzy implications over triangular norms and conforms*, przyjęty do druku w czasopiśmie Kybernetika.

[3] M. Baczyński, W. Niemyska, *On the distributivity equation I(x,U1(y,z)) = U2(I(x,y),I(x,z)) for decomposable uninorms (in interval-valued fuzzy sets theory) generated from conjunctive representable uninorms*, konferencja MDAI 2014.

Bibliografia

[1] M. Baczyński and B. Jayaram: *On the distributivity of fuzzy implications over nilpotent or strict triangular conorms*, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 17 (2009) 590-603.

[2] M.Baczyński: *On the distributivity of fuzzy implications over representable uninorms*, Fuzzy Sets and Systems 161, 2256-2275, 2010.

[3] W.E. Combs, J.E. Andrews: *Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration*, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 6 (1998) 1-11.

[4] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap: *Triangular Norms*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[5] M. Kuczma: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice 1985.

Plan odczytu

- Wprowadzenie pojęć z logiki rozmytej.
- Rozdzielność implikacji rozmytych - co to jest i do czego jest potrzebne?
- O równaniu $f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))$.
- O równaniu $f(u_1+v_1, u_2+v_2) = f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2)$.
- Plany na dalszą pracę.

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Implikacja

$$x \to y$$

$$" \to " : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Implikacja

$$x \to y$$

$$" \to " : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

$$0 \to 0 = 1$$
$$0 \to 1 = 1$$
$$1 \to 0 = 0$$
$$1 \to 1 = 1$$

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Implikacja

$$x \to y$$

$$" \to " : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

$$0 \to 0 = 1$$
$$0 \to 1 = 1$$
$$1 \to 0 = 0$$
$$1 \to 1 = 1$$

$$I(x,y)$$

$$I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$$

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Implikacja

$$x \to y$$

$$" \to ": \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} 0 \to 0 &= 1 \\ 0 \to 1 &= 1 \\ 1 \to 0 &= 0 \\ 1 \to 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$I(x,y)$$

$$I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$$

$$\begin{aligned} I(0,0) &= 1 \\ I(0,1) &= 1 \\ I(1,0) &= 0 \\ I(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Implikacja

$$x \to y$$

$$" \to " : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} 0 \to 0 &= 1 \\ 0 \to 1 &= 1 \\ 1 \to 0 &= 0 \\ 1 \to 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$I(x,y)$$

$$I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$$

$$\begin{aligned} I(0,0) &= 1 \\ I(0,1) &= 1 \\ I(1,0) &= 0 \\ I(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Definicja 1

Funkcja $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest nazywana IMPLIKACJĄ ROZMYTĄ, jeśli dla każdego $x, y \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki

1. $I(\cdot, y)$ *jest malejąca,*
2. $I(x, \cdot)$ *jest rosnąca,*
3. $I(0,0) = 1$,
4. $I(1,1) = 1$,
5. $I(1,0) = 0$.

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Koniunkcja

$x \wedge y$

$"\wedge" : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

$$0 \wedge 0 = 0$$
$$0 \wedge 1 = 0$$
$$1 \wedge 0 = 0$$
$$1 \wedge 1 = 1$$

$T(x,y)$

$T : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T(0,0) = 0$$
$$T(0,1) = 0$$
$$T(1,0) = 0$$
$$T(1,1) = 1$$

Definicja 2

Funkcja $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *jest nazywana NORMĄ TRÓJKĄTNĄ (t-normą), jeśli dla każdego* $x, y, z \in [0,1]$ *spełnione są następujące warunki*

1. $T(x,y) = T(y,x)$,
2. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$,
3. $T(x, \cdot)$ *jest rosnąca,*
4. $T(x,1) = x$.

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Alternatywa

$x \vee y$

$" \vee " : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

$$0 \vee 0 = 0$$
$$0 \vee 1 = 1$$
$$1 \vee 0 = 1$$
$$1 \vee 1 = 1$$

$\rightsquigarrow$

$S(x, y)$

$S : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$S(0,0) = 0$$
$$S(0,1) = 1$$
$$S(1,0) = 1$$
$$S(1,1) = 1$$

Definicja 3

A function $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ jest nazywana KONORMĄ TRÓJKĄTNĄ (t-conormą), jeśli dla każdego $x, y, z \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki

1. $S(x, y) = S(y, x)$,
2. $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$,
3. $S(x, \cdot)$ *jest rosnąca,*
4. $S(x, 0) = x$.

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Uninorma

Definicja 4

Funkcja $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *jest nazywana UNINORMĄ, jeśli istnieje* $e \in [0,1]$ *taki, że dla każdego* $x, y, z \in [0,1]$ *spełnione są następujące warunki*

1. $U(x,y) = U(y,x)$,
2. $U(x, U(y,z)) = U(U(x,y),z)$,
3. $U(x,\cdot)$ *jest rosnąca,*
4. $U(x,e) = x$.

Wprowadzenie operatorów rozmytych - Uninorma

Definicja 4

Funkcja $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *jest nazywana UNINORMĄ, jeśli istnieje* $e \in [0,1]$ *taki, że dla każdego* $x, y, z \in [0,1]$ *spełnione są następujące warunki*

1. $U(x,y) = U(y,x)$,
2. $U(x, U(y,z)) = U(U(x,y), z)$,
3. $U(x,\cdot)$ *jest rosnąca,*
4. $U(x,e) = x$.

Uwaga 1

Dla dowolnej uninormy U *mamy* $U(0,0) = 0$, $U(1,1) = 1$ *oraz* $U(0,1) \in \{0,1\}$. *Jeśli* $U(0,1) = 0$, *to uninormę nazywamy koniunkcyjną, a jeśli* $U(0,1) = 1$, *to uninormę nazywamy alternatywną.*

Compositional Rule of Inference (CRI)

SISO:

Compositional Rule of Inference (CRI)

SISO:

IF x is A, THEN y is B $\quad\longleftarrow\quad R(x,y) = I(A(x),B(y))$

x is A'

---

y is B' $\quad\longleftarrow\quad B' = A' \circ R$

sup-T composition

$$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x), R(x,y)) = \sup_{x \in X} T(A'(x), I(A(x), B(y)))$$

Compositional Rule of Inference (CRI)

SISO:

IF x is A, THEN y is B $\leftarrow$ $R(x,y) = I(A(x),B(y))$

x is A'

---

y is B' $\leftarrow$ $B' = A' \circ R$ sup-T composition

$$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x),R(x,y)) = \sup_{x \in X} T(A'(x),I(A(x),B(y)))$$

MISO:

Compositional Rule of Inference (CRI)

SISO:

IF x is A, THEN y is B $\leftarrow$ $R(x,y) = I(A(x),B(y))$

x is A'

---

y is B' $\leftarrow$ $B' = A' \circ R$

sup-T composition

$$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x), R(x,y)) = \sup_{x \in X} T(A'(x), I(A(x),B(y)))$$

MISO:

IF x is A AND y is B, THEN z is C $\leftarrow$ $(A,B) \rightarrow C$

antecedent combiner

$R(x,y;z) = I(A(x) \circledcirc B(y), C(z))$

x is A' AND y is B' $\leftarrow$ $(A',B') \dashrightarrow A'(x) \circledcirc B'(y)$

---

z is C' $\leftarrow$ $C' = (A',B') \circ ((A,B) \rightarrow C)$

$$C'(z) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} T(A'(x) \circledcirc B'(y), I(A(x) \circledcirc B(y), C(z)))$$

Compositional Rule of Inference (CRI)

SISO:

IF x is A, THEN y is B ← $R(x,y) = I(A(x),B(y))$

x is A'

y is B' ← $B' = A' \circ R$ (sup-T composition)

$B'(y) = \sup_{x \in X} T(A'(x),R(x,y)) = \sup_{x \in X} T(A'(x),I(A(x),B(y)))$

$|X| = |Y| = m$

$A \in F(X)$, $B \in F(Y)$

⇦ $\Theta(m)$

MISO:

IF x is A AND y is B, THEN z is C ← $(A,B) \to C$

$R(x,y;z) = I(A(x) \circledcirc B(y), C(z))$ (antecedent combiner)

x is A' AND y is B' ← $(A',B') \dashrightarrow A'(x) \circledcirc B'(y)$

z is C' ← $C' = (A',B') \circ ((A,B) \to C)$

$C'(z) = \sup_{(x,y) \in X \times Y} T(A'(x) \circledcirc B'(y), I(A(x) \circledcirc B(y), C(z)))$

⇦ $\Theta(m^2)$ / $\Theta(m^k)$

k - number of sets in antecedent

Compositional Rule of Inference (CRI)

Ogólny schemat wielowarunkowego przybliżonego wnioskowania ma postać:

Reguła 1: IF $\tilde{x}$ is A_1, THEN $\tilde{y}$ is B_1
Reguła 2: IF $\tilde{x}$ is A_2, THEN $\tilde{y}$ is B_2
. . . .
Reguła n: IF $\tilde{x}$ is A_n, THEN $\tilde{y}$ is B_n

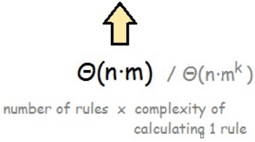
Fakt: $\tilde{x}$ is A

Compositional Rule of Inference (CRI)

Ogólny schemat wielowarunkowego przybliżonego wnioskowania ma postać:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Reguła } 1: & \text{IF } \tilde{x} \text{ is } A_1, \text{ THEN } \tilde{y} \text{ is } B_1 \\
\textit{Reguła } 2: & \text{IF } \tilde{x} \text{ is } A_2, \text{ THEN } \tilde{y} \text{ is } B_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\textit{Reguła } n: & \text{IF } \tilde{x} \text{ is } A_n, \text{ THEN } \tilde{y} \text{ is } B_n \\
 & \\
\textit{Fakt}: & \tilde{x} \text{ is } A \\
\hline
\textit{Wniosek}: & \tilde{y} \text{ is } B
\end{array}
$$

$$B(y) = \sup_{j \in N_n} \sup_{x \in X} T(A(x), I(A_j(x), B_j(y)))$$



$$\left(B = \bigcup_{i=1}^{n} (A \circ R_i) \qquad\right)$$

Compositional Rule of Inference (CRI)

Ogólny schemat wielowarunkowego przybliżonego wnioskowania ma postać:

Reguła 1: IF $\tilde{x}$ is A_1, THEN $\tilde{y}$ is B_1
Reguła 2: IF $\tilde{x}$ is A_2, THEN $\tilde{y}$ is B_2
. . . .
Reguła n: IF $\tilde{x}$ is A_n, THEN $\tilde{y}$ is B_n

Fakt: $\tilde{x}$ is A

Wniosek: $\tilde{y}$ is B

$$B(y) = \sup_{j \in N_n} \sup_{x \in X} T(A(x), I(A_j(x), B_j(y)))$$

$\Theta(n \cdot m)$ / $\Theta(n \cdot m^k)$

number of rules x complexity of calculating 1 rule

$$\left(B = \bigcup_{i=1}^{n} (A \circ R_i) \qquad \right)$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$(x \wedge y) \to z \equiv (x \to z) \vee (y \to z) \qquad (T1)$$

$$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z) \qquad (T2)$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$(x \wedge y) \to z \equiv (x \to z) \vee (y \to z) \qquad (T1)$$

$$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z) \qquad (T2)$$

$$\Downarrow$$

$\to \rightsquigarrow I$
$\wedge \rightsquigarrow T$
$\vee \rightsquigarrow S$

$$I(T(x,y),z) = S(I(x,z), I(y,z)) \qquad (D1)$$

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$(x \wedge y) \to z \equiv (x \to z) \vee (y \to z) \qquad (T1)$$

$$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z) \qquad (T2)$$

$\to \rightsquigarrow I$
$\wedge \rightsquigarrow T$
$\vee \rightsquigarrow S$

$$I(T(x,y),z) = S(I(x,z), I(y,z)) \qquad (D1)$$

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z) \qquad (T2)$$

TAUTOLOGIA

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$x \to (y \vee z) \equiv (x \to y) \vee (x \to z) \qquad (T2)$$

TAUTOLOGIA

x	y	z	$x \to (y \vee z)$		$(x \to y) \vee (x \to z)$			$L \equiv R$
			$y \vee z$	L	$x \to y$	$x \to z$	R	
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$I(x, S(y, z)) = S(I(x, y), I(x, z)) \qquad (D2)$$

TAUTOLOGIA?

Problem: Kiedy powyższe równanie jest prawdziwe? Dla których operatorów S oraz I?

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

TAUTOLOGIA?

Problem: Kiedy powyższe równanie jest prawdziwe? Dla których operatorów S oraz I?

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

Rozdzielność implikacji rozmytych

$$I(x, S(y,z)) = S(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

TAUTOLOGIA?

Problem: Kiedy powyższe równanie jest prawdziwe? Dla których operatorów S oraz I?

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

$$I(T(x,y),z) = S(I(x,z), I(y,z)) \qquad \text{(D1)}$$
$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,z), I(y,z)) \qquad \text{(D2)}$$
$$I(x, T_1(y,z)) = T_2(I(x,z), I(y,z)) \qquad \text{(D3)}$$
$$I(S(x,y),z) = T(I(x,z), I(y,z)) \qquad \text{(D4)}$$

Historia

W.E.Combs, J.E.Andrews (1998): *Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration*,
IEEE Trans. Fuzzy Systems 6, 1-11 (1998)

Historia

W.E.Combs, J.E.Andrews (1998): *Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration*,
IEEE Trans. Fuzzy Systems 6, 1-11 (1998)

S. Dick, A. Kandel (1999): Comments on "Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 7, 475–477:

> ,,Future work on this issue will require an examination of the properties of various combinations of fuzzy unions, intersections and implications."

J.M. Mendel, Q. Liang (1999): Comments on "Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 7, 369–371:

> ,,We think that what this all means is that we have to look past the mathematics of IRC$\Leftrightarrow$URC and inquire whether what we are doing when we replace IRC by URC makes sense."

Historia

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

Baczyński, Jayaram (2009):

- Dla S_1, S_2 obu nilpotentnych lub obu ścisłych t-conorm znamy postać implikacji I,
- Dla R-implikacji I wygenerowanej ze ścisłej t-normy T powyższe równanie jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy t-conormy $S_1 = S_2$ są Φ-sprzężone z t-conormą Łukasiewicza dla pewnej rosnącej bijekcji Φ, która jest multyplikatywnym generatorem ścisłej t-normy T.

Równanie $I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$

Lemat 1

Jesli S jest ciągłą i Archimedesową t-conormą wtedy i tylko wtedy, gdy S jest postaci

$$S(x,y) = s^{-1}(\min(s(x)+s(y), s(1))), \quad x, y \in [0,1]$$

gdzie $s : [0,1] \to [0,\infty]$ jest ciągłą, ściśle rosnącą funkcją, taką że $s(0) = 0$.

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

Lemat 1

Jesli S jest ciągłą i Archimedesową t-conormą wtedy i tylko wtedy, gdy S jest postaci

$$S(x, y) = s^{-1}(\min(s(x) + s(y), s(1))), \quad x, y \in [0, 1]$$

gdzie $s : [0, 1] \to [0, \infty]$ jest ciągłą, ściśle rosnącą funkcją, taką że $s(0) = 0$.

Uwaga 2

- *S jest ścisłą t-conormą wtedy i tylko wtedy, gdy $s(1) = \infty$;*
- *S jest nilpotentną t-conormą wtedy i tylko wtedy, gdy $s(1) < \infty$.*

Równanie $I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

Równanie $I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

$$\downarrow$$

Lemat 1: $S_k(x,y) = s_k^{-1}(\min(s_k(x) + s_k(y), s_k(1))), \quad x, y \in [0,1]$

$$\downarrow$$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$$

$$\downarrow$$

Lemat 1: $S_k(x, y) = s_k^{-1}(\min(s_k(x) + s_k(y), s_k(1))), \quad x, y \in [0, 1]$

$$\downarrow$$

$$I(x, s_1^{-1}(\min(s_1(y)+s_1(z), s_1(1)))) = s_2^{-1}(\min(s_2(I(x, y)+s_2(I(x, z)), s_2(1)))$$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$$

$$\downarrow$$

Lemat 1: $S_k(x, y) = s_k^{-1}(\min(s_k(x) + s_k(y), s_k(1))), \quad x, y \in [0, 1]$

$$\downarrow$$

$$I(x, s_1^{-1}(\min(s_1(y)+s_1(z), s_1(1)))) = s_2^{-1}(\min(s_2(I(x, y)+s_2(I(x, z), s_2(1)))$$

$$\downarrow$$

$g_x(\cdot) = s_2 \circ I(x, s_1^{-1}(\cdot))$, *dla ustalonego* $x \in [0, 1]$

$$\downarrow$$

Równanie $I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

$$\downarrow$$

Lemat 1: $S_k(x,y) = s_k^{-1}(\min(s_k(x)+s_k(y), s_k(1))), \quad x, y \in [0,1]$

$$\downarrow$$

$$I(x, s_1^{-1}(\min(s_1(y)+s_1(z), s_1(1)))) = s_2^{-1}(\min(s_2(I(x,y)+s_2(I(x,z), s_2(1)))$$

$$\downarrow$$

$$g_x(\cdot) = s_2 \circ I(x, s_1^{-1}(\cdot)), \text{ dla ustalonego } x \in [0,1]$$

$$\downarrow$$

$$g_x(\min(s_1(y)+s_1(z), s_1(1))) = \min(g_x(s_1(y)) + g_x(s_1(z)), s_2(1))$$

Równanie $I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z))$$

$$\downarrow$$

Lemat 1: $S_k(x,y) = s_k^{-1}(\min(s_k(x) + s_k(y), s_k(1))), \quad x, y \in [0,1]$

$$\downarrow$$

$$I(x, s_1^{-1}(\min(s_1(y)+s_1(z), s_1(1)))) = s_2^{-1}(\min(s_2(I(x,y)+s_2(I(x,z), s_2(1)))$$

$$\downarrow$$

$g_x(\cdot) = s_2 \circ I(x, s_1^{-1}(\cdot))$, *dla ustalonego* $x \in [0,1]$

$$\downarrow$$

$$g_x(\min(s_1(y) + s_1(z), s_1(1))) = \min(g_x(s_1(y)) + g_x(s_1(z)), s_2(1))$$

$$\downarrow$$

$$f(\min(u+v, r_1)) = \min(f(u) + f(v), r_2),$$

gdzie $u, v \in [0, r_1], \quad r_1 := s_1(1), r_2 := s_2(1) \in (0, \infty)$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$f(\min(u+v, r_1)) = \min(f(u)+f(v), r_2),$$

gdzie $u, v \in [0, r_1], \quad r_1 := s_1(1), r_2 := s_2(1) \in (0, \infty)$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$f(\min(u+v, r_1)) = \min(f(u)+f(v), r_2),$$

gdzie $u, v \in [0, r_1], \quad r_1 := s_1(1), r_2 := s_2(1) \in (0, \infty)$

$$\boxed{f(u+v) = \min(f(u)+f(v), r_2)}$$

$$\boxed{f(\min(u+v, r_1)) = f(u)+f(v)}$$

$$\boxed{f(u+v) = f(u)+f(v)}$$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$f(\min(u+v, r_1)) = \min(f(u)+f(v), r_2),$$

gdzie $u, v \in [0, r_1], \quad r_1 := s_1(1), r_2 := s_2(1) \in (0, \infty)$

Równanie $I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z))$

$$f(\min(u+v, r_1)) = \min(f(u)+f(v), r_2),$$

gdzie $u, v \in [0, r_1], \quad r_1 := s_1(1), r_2 := s_2(1) \in (0, \infty)$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))} \qquad (1),$$

gdzie dla ustalonych $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ funkcje
$m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 : [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ oraz $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$.

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Lemat 2 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ *będą pewnymi liczbami i niech* $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ *będą danymi funkcjami. Jeśli* m_2 *jest "1-1" oraz funkcja* $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ *spełnia równanie funkcyjne (1), to*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Lemat 2 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ *będą pewnymi liczbami i niech* $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ *będą danymi funkcjami. Jeśli* m_2 *jest "1-1" oraz funkcja* $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ *spełnia równanie funkcyjne (1), to*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

Dowód.

$$m_2^{-1}(f(m_1(x+y))) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Lemat 2 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ będą pewnymi liczbami i niech $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Jeśli m_2 jest "1-1" oraz funkcja $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ spełnia równanie funkcyjne (1), to

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

Dowód.

$$m_2^{-1}(f(m_1(x+y))) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1],$$

i wstawiając $F(t) := m_2^{-1}(f(m_1(t)))$, dla $t \in [0, 2r_1]$, otrzymujemy

$$F(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in [0, r_1].$$

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Lemat 2 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0,\infty)$ będą pewnymi liczbami i niech $m_1\colon [0,2r_1] \to [0,r_1]$, $m_2\colon [0,2r_2] \to [0,r_2]$ będą danymi funkcjami. Jeśli m_2 jest "1-1" oraz funkcja $f\colon [0,r_1] \to [0,r_2]$ spełnia równanie funkcyjne (1), to

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x)+f(y), \qquad x,y \in [0,r_1].$$

Dowód.

$$m_2^{-1}(f(m_1(x+y))) = f(x)+f(y), \qquad x,y \in [0,r_1],$$

i wstawiając $F(t) := m_2^{-1}(f(m_1(t)))$, dla $t \in [0,2r_1]$, otrzymujemy

$$F(x+y) = f(x)+f(y), \qquad x,y \in [0,r_1].$$

$$f(x)+f(y) = F(x+y) = F\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$\square$

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Twierdzenie 1 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ będą pewnymi liczbami oraz niech $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$, $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Dalej, niech m_2 będzie różnowartościowa. Wtedy następujące zdania są równoważne:

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Twierdzenie 1 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ będą pewnymi liczbami oraz niech $m_1\colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2\colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$, $f\colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Dalej, niech m_2 będzie różnowartościowa. Wtedy następujące zdania są równoważne:

1. *Trójka funkcji m_1, m_2, f spełnia równanie (1).*

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Twierdzenie 1 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ będą pewnymi liczbami oraz niech $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$, $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Dalej, niech m_2 będzie różnowartościowa. Wtedy następujące zdania są równoważne:

1. *Trójka funkcji m_1, m_2, f spełnia równanie (1).*
2. $f(x) = ax + b$ *dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.*

m_2 - "1-1" $[\, f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y)) \,]$

Twierdzenie 1 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ będą pewnymi liczbami oraz niech $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$, $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$ będą danymi funkcjami. Dalej, niech m_2 będzie różnowartościowa. Wtedy następujące zdania są równoważne:

1. *Trójka funkcji m_1, m_2, f spełnia równanie (1).*
2. *$f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.*
   Dokładniej:
   Albo $f = b$ dla pewnego $b \in [0, r_2]$ oraz $m_2(2b) = b$, albo $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, takich że

   $$ax + b \in [0, r_2], \qquad \text{for all } x \in [0, r_1]$$

   and

   $$m_1(x) = \frac{m_2(ax + 2b) - b}{a}.$$

m_2 - "1-1" [$f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))$]

Schemat dowodu

$1 \Rightarrow 2$

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Schemat dowodu

$1 \Rightarrow 2$

- f spełnia równanie Jensena: $2 \cdot f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y)$;

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Schemat dowodu

$1 \Rightarrow 2$

- f spełnia równanie Jensena: $2 \cdot f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y)$;
- f jest ograniczona $\Rightarrow$ $f(x) = ax + b$ (Kuczma [5])

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Schemat dowodu

$1 \Rightarrow 2$

- f spełnia równanie Jensena: $2 \cdot f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y)$;
- f jest ograniczona $\Rightarrow$ $f(x) = ax + b$ (Kuczma [5])
- Rozważmy dwa przypadki: $a = 0$ oraz $a \neq 0$;

m_2 - "1-1" $[\ f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))\ ]$

Schemat dowodu

$1 \Rightarrow 2$

- f spełnia równanie Jensena: $2 \cdot f(\frac{x+y}{2}) = f(x) + f(y)$;
- f jest ograniczona $\Rightarrow$ $f(x) = ax + b$ (Kuczma [5])
- Rozważmy dwa przypadki: $a = 0$ oraz $a \neq 0$;

$2 \Rightarrow 1$

- łatwo sprawdzić;

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ *oraz niech funkcje* $m_1 \colon [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 \colon [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ *będą ciągłe oraz ściśle rosnące na pewnych przedziałach* $[0, x_1]$, $[0, x_2]$, *odpowiednio, a następnie stale równe* r_1, r_2, *odpowiednio, gdzie* $x_1 \leq r_1$ *and* $x_2 \leq r_2$. *Dalej, niech* m_1, m_2 *spełniają*

$$m_1(0) = 0, \qquad 2m_1(x) > x, \qquad x \in (0, 2r_1)$$

oraz

$$m_2(0) = 0, \qquad 2m_2(x) > x, \qquad x \in (0, 2r_2).$$

Wreszcie niech f *będzie funkcją* $f \colon [0, r_1] \to [0, r_2]$.

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. $f = r_2$;

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. $f = r_2$;
2. $f = 0$;

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. $f = r_2$;
2. $f = 0$;
3. $f(0) = 0, f(x) = r_2$ *for* $x > 0$;

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. $f = r_2$;
2. $f = 0$;
3. $f(0) = 0, f(x) = r_2$ *for* $x > 0$;
4. *istnieje* $x_0 \in (0, x_1]$ *takie, że*

$$f(x) = \min(m_2(km_{10}^{-1}(x)), r_2),$$

gdzie $k = \frac{x_2}{x_0}$ *oraz* $m_{10} = m_1|_{x \le x_1}$.
Ponadto w tym przypadku

$$km_1(x) = m_2(kx),$$

dla $x < y_0$, $y_0 = m_{10}^{-1}(x_0)$.

m_2 - NIE różnowartościowa

Twierdzenie 2 (art. [1])

Niech f, m_1, m_2 spełniają powyższe założenia.
Trójka funkcji spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. $f = r_2$;
2. $f = 0$;
3. $f(0) = 0, f(x) = r_2$ *for* $x > 0$;
4. *istnieje* $x_0 \in (0, x_1]$ *takie, że*

$$f(x) = \min(m_2(km_{10}^{-1}(x)), r_2),$$

gdzie $k = \frac{x_2}{x_0}$ *oraz* $m_{10} = m_1|_{x \leq x_1}$.
Ponadto w tym przypadku

$$km_1(x) = m_2(kx),$$

dla $x < y_0$, $y_0 = m_{10}^{-1}(x_0)$.

Przykład 1

Przykład 1 (art. [2])

Ustalmy $r_1, r_2 > 0$ *oraz* $\alpha \geq 1$.

- $m_1(x) = \min(\alpha x, r_1)$ *dla* $x \in [0, 2r_1]$
- $m_2(x) = \min(\alpha x, r_2)$ *dla* $x \in [0, 2r_2]$.

W tym przypadku dostajemy następujace równanie

$$f(\min(\alpha(x+y), r_1)) = \min(\alpha(f(x)+f(y)), r_2).$$

Przykład 1

Przykład 1 (art. [2])

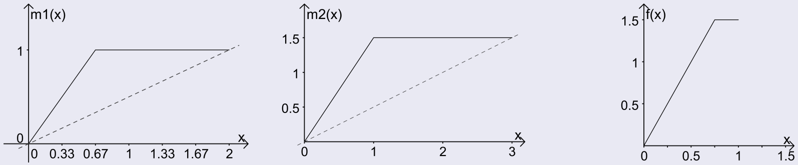
Ustalmy $r_1, r_2 > 0$ *oraz* $\alpha \geq 1$.

- $m_1(x) = \min(\alpha x, r_1)$ *dla* $x \in [0, 2r_1]$
- $m_2(x) = \min(\alpha x, r_2)$ *dla* $x \in [0, 2r_2]$.

W tym przypadku dostajemy następujace równanie

$$f(\min(\alpha(x+y), r_1)) = \min(\alpha(f(x)+f(y)), r_2).$$

Z Tw. 2 otrzymujemy, że jedyne nietrywialne rozwiązanie jest postaci $f(x) = \min(kx, r_2)$, *gdzie* $k = \frac{r_2}{\alpha x_0}$.



Przykład 2

Przykład 2 (art. [2])

Ustalmy $r_1, r_2 > 0$.

- $m_1(x) = \min(\sqrt{r_1 x}, r_1)$ *for* $x \in [0, 2r_1]$,
- $m_2(x) = \min(\sqrt{r_2 x}, r_2)$ *for* $x \in [0, 2r_2]$.

W tym przypadku otrzymujemy następujące równanie

$$f(\min(\sqrt{r_1(x+y)}, r_1)) = \min(\sqrt{r_2(f(x)+f(y))}, r_2) \tag{1}$$

Przykład 2

Przykład 2 (art. [2])

Ustalmy $r_1, r_2 > 0$.

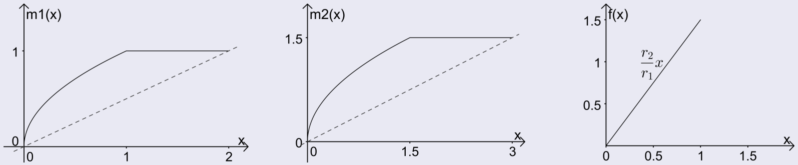
- $m_1(x) = \min(\sqrt{r_1 x}, r_1)$ *for* $x \in [0, 2r_1]$,
- $m_2(x) = \min(\sqrt{r_2 x}, r_2)$ *for* $x \in [0, 2r_2]$.

W tym przypadku otrzymujemy następujące równanie

$$f(\min(\sqrt{r_1(x+y)}, r_1)) = \min(\sqrt{r_2(f(x)+f(y))}, r_2) \tag{1}$$

Z Tw. 2 otrzymujemy, że jedyne nietrywialne rozwiązanie jest postaci

$$f(x) = \frac{r_2}{r_1}x.$$



Przykład 3

Przykład 3 (art. [2])

Ustalmy $r_1, r_2 > 0$ *oraz* $\alpha, \beta \geq 1$. *Niech*

$$m_1(x) = \begin{cases} r_1 \sin(\frac{\Pi}{2}\frac{\alpha}{r_1}x) & x \in [0, \frac{r_1}{\alpha}), \\ r_1 & x \in [\frac{r_1}{\alpha}, 2r_1] \end{cases}$$

$$m_2(x) = \begin{cases} r_2 \sin(\frac{\Pi}{2}\frac{\beta}{r_2}x) & x \in [0, \frac{r_2}{\alpha}), \\ r_2 & x \in [\frac{r_2}{\alpha}, 2r_2] \end{cases}$$

Przykład 3

Przykład 3 (art. [2])

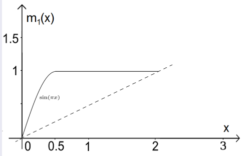
Ustalmy $r_1, r_2 > 0$ *oraz* $\alpha, \beta \geq 1$. *Niech*

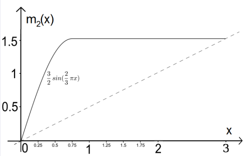
$$m_1(x) = \begin{cases} r_1 \sin(\frac{\Pi}{2} \frac{\alpha}{r_1} x) & x \in [0, \frac{r_1}{\alpha}), \\ r_1 & x \in [\frac{r_1}{\alpha}, 2r_1] \end{cases}$$

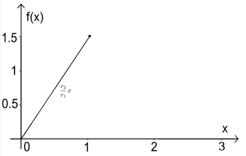
$$m_2(x) = \begin{cases} r_2 \sin(\frac{\Pi}{2} \frac{\beta}{r_2} x) & x \in [0, \frac{r_2}{\alpha}), \\ r_2 & x \in [\frac{r_2}{\alpha}, 2r_2] \end{cases}$$

Z Tw. 2 otrzymujemy, że jedyne nietrywialne rozwiązanie jest postaci

$$f(x) = \frac{r_2}{r_1} x.$$







PLANOWANA DALSZA PRACA

$$\boxed{f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))} \qquad (1),$$

gdzie dla ustalonych $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ funkcje
$m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 : [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ oraz $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$.

PLANOWANA DALSZA PRACA

$$\boxed{f(m_1(x+y)) = m_2(f(x)+f(y))} \qquad (1),$$

gdzie dla ustalonych $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ funkcje
$m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 : [0, 2r_2] \to [0, r_2]$ oraz $f : [0, r_1] \to [0, r_2]$.

- $m_1 : [0, \infty] \to [0, \infty]$, $m_2 : [0, 2r_2] \to [0, r_2]$
- $m_1 : [0, 2r_1] \to [0, r_1]$, $m_2 : [0, \infty] \to [0, \infty]$
- $m_1 : [0, \infty] \to [0, \infty]$, $m_2 : [0, \infty] \to [0, \infty]$

Uninormy

$$I(x, S_1(y, z)) = S_2(I(x, y), I(x, z)) \qquad (D2)$$

Uninormy

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

$$\downarrow$$

$$I(x, U_1(y,z)) = U_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (DU)$$

Uninormy

$$I(x, S_1(y,z)) = S_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (D2)$$

$$\downarrow$$

$$I(x, U_1(y,z)) = U_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (DU)$$

Definicja 5

Uninormę $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy reprezentowalną, gdy istnieje ciągła, ściśle rosnąca funkcja $h\colon [0,1] \to [-\infty,\infty]$ taka, że $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$, $h(1) = \infty$, która jest określona jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej multyplikatywnej i taka, że dla wszystkich $x, y \in [0,1]$

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x)+h(y)), & \text{wpp}, \end{cases}$$

gdy U jest koniunkcyjna, lub

$$U(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x)+h(y)), & \text{wpp}, \end{cases}$$

gdy U jest alternatywna.

Uninormy - historia

$$I(x, U_1(y,z)) = U_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (DU)$$

Dla uninorm reprezentatywnych:

$$\boxed{\text{Baczyński, 2010:} \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in [-\infty, \infty]},$$

Uninormy - historia

$$I(x, U_1(y,z)) = U_2(I(x,y), I(x,z)) \qquad (DU)$$

Dla uninorm reprezentatywnych:

$$\boxed{\text{Baczyński, 2010:} \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in [-\infty, \infty]},$$

$$(-\infty) + \infty = +/-\infty$$
$$\infty + (-\infty) = +/-\infty$$

Przedziałowe zbiory rozmyte

Definicja 6

Zdefiniujmy

$$L^I = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 | x_1 \le x_2\}$$

$$(x_1, x_2) \le_{L^I} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \le y_1, x_2 \le y_2$$
$$\mathcal{L}^I = (L^I, \le_{L^I}).$$

Definicja 7

Uninormę $\mathcal{U}$ na $\mathcal{L}^I$ nazywamy ***rozkładalną****, gdy istnieją uninormy U_1, U_2 na $([0,1], \le)$ takie, że*

$$\mathcal{U}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)], \quad [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L^I,$$

oraz $U_1 \le U_2$. Piszemy wtedy $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$.

Przedziałowe zbiory rozmyte

M.Baczyński w latach 2010-2014 opublikował artykuły, w których rozwiązywane są równania:

$$\mathcal{I}(x, \mathcal{T}_1(y,z)) = \mathcal{T}_2(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)),$$

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}(x,y), z) = \mathcal{T}(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)),$$

dla rozkładalnych t-norm oraz t-conorm określonych na $\mathcal{L}^I$.

Przedziałowe zbiory rozmyte

M.Baczyński w latach 2010-2014 opublikował artykuły, w których rozwiązywane są równania:

$$\mathcal{I}(x, \mathcal{T}_1(y, z)) = \mathcal{T}_2(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z)),$$
$$\mathcal{I}(\mathcal{S}(x, y), z) = \mathcal{T}(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z)),$$

dla rozkładalnych t-norm oraz t-conorm określonych na $\mathcal{L}^I$.

Zbadane równania funkcyjne

$$\begin{aligned} f(u_1+v_1, u_2+v_2) &= f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2), \\ g(\min(u_1+v_1, a), \min(u_2+v_2, a)) &= g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2), \\ h(\min(u_1+v_1, a), \min(u_2+v_2, a)) &= \min(h(u_1, u_2) + h(v_1, v_2), b), \\ k(u_1+v_1, u_2+v_2) &= \min(k(u_1, u_2) + k(v_1, v_2), b), \end{aligned}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są dodatnimi liczbami, $f\colon L^\infty \to [0, \infty]$, $g\colon L^a \to [0, \infty]$, $h\colon L^a \to [0, b]$, $k\colon L^\infty \to [0, b]$ są nieznanymi funkcjami oraz

$$L^\infty = \{(u_1, u_2) \in [0, \infty]^2 \mid u_1 \geq u_2\},$$
$$L^a = \{(u_1, u_2) \in [0, a]^2 \mid u_1 \geq u_2\}.$$

M. Baczyński, W. Niemyska

On the distributivity equation I(x,U1(y,z)) = U2(I(x,y),I(x,z)) for decomposable uninorms (in interval-valued fuzzy sets theory) generated from conjunctive representable uninorms,
konferencja MDAI 2014

$$\boxed{\mathcal{I}(x, \mathcal{U}_1(y,z)) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)),} \qquad (DUU)$$

dla $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ rozkładalnych uninorm na $\mathcal{L}^I$, wygenerowanych z dwóch koniunkcyjnych reprezentowalnych uninorm oraz nieznanej funkcji $\mathcal{I}$.

M. Baczyński, W. Niemyska

On the distributivity equation I(x,U1(y,z)) = U2(I(x,y),I(x,z)) for decomposable uninorms (in interval-valued fuzzy sets theory) generated from conjunctive representable uninorms,
konferencja MDAI 2014

$$\boxed{\mathcal{I}(x,\mathcal{U}_1(y,z)) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x,y),\mathcal{I}(x,z)),} \qquad (DUU)$$

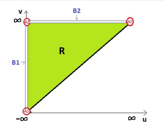
dla $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ rozkładalnych uninorm na $\mathcal{L}^I$, wygenerowanych z dwóch koniunkcyjnych reprezentowalnych uninorm oraz nieznanej funkcji $\mathcal{I}$.

$$\boxed{f(u_1+v_1, u_2+v_2) = f(u_1, u_2) + f(v_1, v_2),} \qquad (2)$$

dla $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^{\overline{\infty}}$, gdzie $L^{\overline{\infty}} = \{(x_1, x_2) \in [-\infty, \infty]^2 \mid x_1 \leq x_2\}$, z założeniem $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$ w obu zbiorach dziedziny oraz przeciwdziedziny funkcji f.

Uwaga 3

Dziedzina funkcji f, która jest rozwiązaniem równania (2), może być podzielona na 6 części, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 oraz R.



Otrzymaliśmy, że f może przyjąć tylko następujące wartości na poszczególnych zbiorach:

- A_1, A_2, A_3: $-\infty$, 0 *lub* ∞;
- B_1: $-\infty$, 0, ∞ *lub* $c(v)$;
- B_2: $-\infty$, 0, ∞ *lub* $c(u)$;
- R: $-\infty$, 0, ∞, $c(u)$, $c(v)$ *lub* $c_1(u-v)+c_2(v)$;

gdzie c, c_1, c_2 to funkcje addytywne określone na $\mathbb{R}$.

2592 *możliwych kombinacji tych wartości -* 33 *z nich stanowią rozwiązania* (2).

PLANOWANA DALSZA PRACA

$$\boxed{\mathcal{I}(x, \mathcal{U}_1(y, z)) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z)),} \qquad (DUU)$$

dla $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ rozkładalnych uninorm na $\mathcal{L}^I$, wygenerowanych z dwóch koniunkcyjnych reprezentowalnych uninorm, z założeniem $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$.

PLANOWANA DALSZA PRACA

$$\boxed{\mathcal{I}(x, \mathcal{U}_1(y,z)) = \mathcal{U}_2(\mathcal{I}(x,y), \mathcal{I}(x,z)),} \qquad (DUU)$$

dla $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ rozkładalnych uninorm na $\mathcal{L}^I$, wygenerowanych z dwóch koniunkcyjnych reprezentowalnych uninorm, z założeniem $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = -\infty$.

- $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ rozkładalne uninormy na $\mathcal{L}^I$, wygenerowane z dwóch alternatywnych reprezentowalnych uninorm;
- Założenie $(-\infty) + \infty = \infty + (-\infty) = +\infty$.

Inne prace

M. Baczyński, P. Grzegorzewski, W. Niemyska

Laws of Contraposition and Law of Importation for Probabilistic Implications and Probabilistic S-implications,
Communications in Computer and Information Science Volume 442, 2014, 158-167.

Inne prace

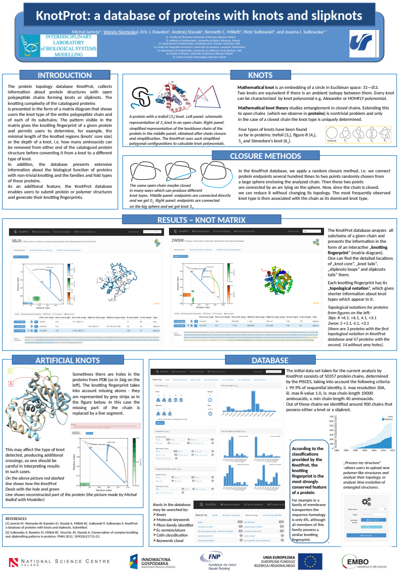
M. Baczyński, P. Grzegorzewski, W. Niemyska

Laws of Contraposition and Law of Importation for Probabilistic Implications and Probabilistic S-implications,
Communications in Computer and Information Science Volume 442, 2014, 158-167.

Michał Jamróz, Wanda Niemyska, Eric J. Rawdon, Andrzej Stasiak, Kenneth C. Millett, Piotr Sułkowski, Joanna I. Sułkowska

KnotProt: a database of proteins with knots and slipknots,
przyjęte do druku w czasopiśmie "Nucleic Acids Research".

Inne prace


KnotProt: a database of proteins with knots and slipknots
Michał Jamróz1, Wanda Niemyska2, Eric J. Rawdon3, Andrzej Stasiak4, Kenneth C. Millett5, Piotr Sułkowski6, and Joanna I. Sułkowska1,7
1). Faculty of Chemistry, University of Warsaw, Warsaw, Poland
2). Institute of Mathematics, University of Silesia, Katowice, Poland
3). Department of Mathematics, University of St. Thomas, Saint Paul, USA
4). Center for Integrative Genomics, University of Lausanne, Lausanne, Switzerland
5). Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, USA
6). Faculty of Physics, University of Warsaw, Warsaw, Poland
7). Centre of New Technologies, Warsaw, Poland
INTERDISCIPLINARY LABORATORY of BIOLOGICAL SYSTEMS MODELLING
INTRODUCTION
The protein topology database KnotProt, collects information about protein structures with open polypeptide chains forming knots or slipknots. The knotting complexity of the catalogued proteins is presented in the form of a matrix diagram that shows users the knot type of the entire polypeptide chain and of each of its subchains. The pattern visible in the matrix gives the knotting fingerprint of a given protein and permits users to determine, for example, the minimal length of the knotted regions (knots' core size) or the depth of a knot, i.e. how many aminoacids can be removed from either end of the catalogued protein structure before converting it from a knot to a different type of knot.
In addition, the database presents extensive information about the biological function of proteins with non-trivial knotting and the families and fold types of these proteins.
As an additional feature, the KnotProt database enables users to submit protein or polymer structures and generate their knotting fingerprints.
KNOTS
A protein with a trefoil (3₁) knot. Left panel: schematic representation of 3₁ knot in an open chain. Right panel: simplified representation of the backbone chain of the protein in the middle panel, obtained after chain closure and simplification. The KnotProt uses such simplified polygonal configurations to calculate knot polynomials.
Mathematical knot is an embedding of a circle in Euclidean space: S1→ℝ3.
Two knots are equivelent if there is an ambient isotopy between them. Every knot can be characterized by knot polynomial e.g. Alexander or HOMFLY polynomial.
Mathematical knot theory studies entanglement in closed chains. Extending this to open chains (which we observe in proteins) is nontrivial problem and only in the case of a closed chain the knot type is uniquely determined.
Four types of knots have been found so far in proteins: trefoil (3₁), figure-8 (4₁), 5₂ and Stevedore's knot (6₁).
Unknot
CLOSURE METHODS
The same open chain maybe closed in many ways which can produce different knot types. Middle panel: endpoints are connected directly and we get 0₁. Right panel: endpoints are connected on the big sphere and we get knot 3₁.
In the KnotProt database, we apply a random closure method, i.e. we connect protein endpoints several hundred times to two points randomly chosen from a large sphere enclosing the analyzed chain. Then these two points are connected by an arc lying on the sphere. Now, since the chain is closed, we can reduce it without changing its topology. The most frequently observed knot type is then associated with the chain as its dominant knot type.
RESULTS – KNOT MATRIX
3BJX
2WSW
Residue index
The KnotProt database anayzes all subchains of a given chain and presents the information in the form of an interactive „knotting fingerprint" (matrix diagram). One can find the detailed locations of „knot core", „knot tails", „slipknots loops" and slipknots tails" there.
Each knotting fingerprint has its „topological notation", which gives shorter information about knot types which appear in it.
Topological notations for proteins from figures on the left:
3bjx: K +6.1, +6.1, 4.1, +3.1
2wsw: S +3.1, 4.1, +3.1
(there are 3 proteins with the first topological notation in KnotProt database and 47 proteins with the second, 14 without amy holes).
ARTIFICIAL KNOTS
Sometimes there are holes in the proteins from PDB (as in 3sig on the left). The knotting fingerprint takes into account missing atoms - they are represented by grey strips as in the figure below. In this case the missing part of the chain is replaced by a line segment.
3SIG
This may affect the type of knot detected, producing additional crossings, so one should be careful in interpreting results in such cases.
On the above picture red dashed line shows how the KnotProt Deals with the hole and green Line shows reconstructed part of the protein (the picture made by Michał Kadlof with Modeller)
REFERENCES
[1] Jamróz M, Niemyska W, Rawdon EJ, Stasiak A, Millett KC, Sułkowski P, Sułkowska JI. KnotProt: a database of proteins with knots and slipknots. Submitted.
[2] Sułkowska JI, Rawdon EJ, Millett KC, Onuchic JN, Stasiak A. Conservation of complex knotting and slipknotting patterns in proteins. PNAS 2012, 109(26):E1715-23.
DATABASE
The initial data set taken for the current analysis by KnotProt consists of 50357 protein chains, determined by the PISCES, taking into account the following criteria: i. 99.9% of sequential identity, ii. max resolution 30A, iii. max R-value 1.0, iv. max chain length 10000 aminoacids, v. min chain length 40 aminoacids.
Out of those chains we identified around 900 chains that possess either a knot or a slipknot.
Knot
Slipknot
According to the classifications provided by the KnotProt, the knotting fingerprint is the most strongly conserved feature of a protein.
For example in a family of membrane transporters the sequence homology is only 6%, although all members of this family possess a similar knotting fingerprint.
Knots in the database may be searched by:
Knots
Molecule keywords
Pfam family identifier
Ec nomenclature
Cath classification
Keywords cloud
„Process my structure" -allows users to upload new polymer-like structures and analyze their topology, or analyze time evolution of entangled structures.
NATIONAL SCIENCE CENTRE POLAND
INNOWACYJNA GOSPODARKA NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
FNP Fundacja na rzecz Nauki Polskiej
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
EMBO excellence in life sciences

BARDZO DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!