Operatorowe wersje twierdzenia Radona-Nikodyma

Włodzimierz Fechner

Zakład Równań Funkcyjnych

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki UŚ, 22-26 września 2014r.

Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną oraz ν, μ są miarami określonymi na X.

skalarne twierdzenie Radona-Nikodyma

Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną oraz ν, μ są miarami określonymi na X.
Twierdzenie Radona-Nikodyma mówi, że ν jest bezwzględnie ciągła względem μ (piszemy $\nu \ll \mu$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja mierzalna $g\colon X \to [0, +\infty)$, że

$$\int f\, d\nu = \int (f \cdot g)\, d\mu$$

dla wszystkich $f \in L^1(\nu)$.

twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar wektorowych

Niech Y będzie przestrzenią Banacha.

Niech Y będzie przestrzenią Banacha.
Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, μ jest miarą, a ν jet taką przeliczalnie addytywną miara wektorową o ograniczonej wariacji mającą wartości w Y, że $|\nu| \ll \mu$.

Niech Y będzie przestrzenią Banacha.
Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, μ jest miarą, a ν jet taką przeliczalnie addytywną miara wektorową o ograniczonej wariacji mającą wartości w Y, że $|\nu| \ll \mu$.
Mówimy, że przestrzeń Banacha Y ma własność Radona-Nikodyma, jeśli istnieje taka μ-całkowalna funkcja $g\colon X \to Y$, że:

$$\nu(E) = \int_E g\,d\mu, \quad E \in \mathcal{A}$$

Niech Y będzie przestrzenią Banacha.
Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, μ jest miarą, a ν jet taką przeliczalnie addytywną miara wektorową o ograniczonej wariacji mającą wartości w Y, że $|\nu| \ll \mu$.
Mówimy, że przestrzeń Banacha Y ma własność Radona-Nikodyma, jeśli istnieje taka μ-całkowalna funkcja $g\colon X \to Y$, że:

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu, \quad E \in \mathcal{A}$$

Każda przestrzeń refleksywna ma własność Radona-Nikodyma.

Niech Y będzie przestrzenią Banacha.
Załóżmy, że $X = (X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, μ jest miarą, a ν jet taką przeliczalnie addytywną miara wektorową o ograniczonej wariacji mającą wartości w Y, że $|\nu| \ll \mu$.
Mówimy, że przestrzeń Banacha Y ma własność Radona-Nikodyma, jeśli istnieje taka μ-całkowalna funkcja $g\colon X \to Y$, że:

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu, \quad E \in \mathcal{A}$$

Każda przestrzeń refleksywna ma własność Radona-Nikodyma.
Istnieją przestrzenie, które nie mają tej własności, np. c_0, $L^1(\Omega)$, $C(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$.

Zapis operatorowy

Zapis operatorowy

Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\,d\nu, \quad V(h) := \int h\,d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Zapis operatorowy

Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\,d\nu, \quad V(h) := \int h\,d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x)\cdot g(x).$$

T i V to operatory dodatnie określone na $L^1(\nu)$ i $L^1(\mu)$, odpowiednio, a π to ortomorfizm $L^1(\nu)$, Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\,d\nu, \quad V(h) := \int h\,d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

T i V to operatory dodatnie określone na $L^1(\nu)$ i $L^1(\mu)$, odpowiednio, a π to ortomorfizm $L^1(\nu)$, tzn. π jest porządkowo ograniczonym operatorem, dla którego zachodzi implikacja: $f \perp g$ pociąga $\pi f \perp g$.

Zapis operatorowy

Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\,d\nu, \quad V(h) := \int h\,d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

T i V to operatory dodatnie określone na $L^1(\nu)$ i $L^1(\mu)$, odpowiednio, a π to ortomorfizm $L^1(\nu)$, tzn. π jest porządkowo ograniczonym operatorem, dla którego zachodzi implikacja: $f \perp g$ pociąga $\pi f \perp g$.
Teza twierdzenia Radona-Nikodyma:

$$\int f\,d\nu = \int (f \cdot g)\,d\mu$$

Zapis operatorowy

Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\, d\nu, \quad V(h) := \int h\, d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

T i V to operatory dodatnie określone na $L^1(\nu)$ i $L^1(\mu)$, odpowiednio, a π to ortomorfizm $L^1(\nu)$, tzn. π jest porządkowo ograniczonym operatorem, dla którego zachodzi implikacja: $f \perp g$ pociąga $\pi f \perp g$.
Teza twierdzenia Radona-Nikodyma:

$$\int f\, d\nu = \int (f \cdot g)\, d\mu$$

może być zapisana jako:

Zapis operatorowy

Oznaczmy:

$$T(f) := \int f\,d\nu, \quad V(h) := \int h\,d\mu, \quad \pi(f)(x) := f(x)\cdot g(x).$$

T i V to operatory dodatnie określone na $L^1(\nu)$ i $L^1(\mu)$, odpowiednio, a π to ortomorfizm $L^1(\nu)$, tzn. π jest porządkowo ograniczonym operatorem, dla którego zachodzi implikacja: $f \perp g$ pociąga $\pi f \perp g$.
Teza twierdzenia Radona-Nikodyma:

$$\int f\,d\nu = \int (f\cdot g)\,d\mu$$

może być zapisana jako: $T = V \circ \pi$.

Dorothy Maharam, *The representation of abstract integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 154–184.

Dorothy Maharam, *The representation of abstract integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 154–184.

Dorothy Maharam, *On kernel representation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 229–255.

wyniki D. Maharam i twierdzenie Luxemburga-Schepa

- Dorothy Maharam, *The representation of abstract integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 154–184.
- Dorothy Maharam, *On kernel representation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 229–255.
- W.A.J. Luxemburg, A.R. Schep, *A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual*, Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A, 81 (1978), 357–375.

Niech F i G będą przestrzeniami Riesza i niech $V\colon F \to G$ będzie dodatnim operatorem liniowym.

własność Maharam

Niech F i G będą przestrzeniami Riesza i niech $V\colon F \to G$ będzie dodatnim operatorem liniowym.

Mówimy, że V ma *własność Maharam* jeśli dla każdych $f \in F$ i $g \in G$ spełniających $f \geqslant 0$ and $0 \leqslant g \leqslant Vf$ istnieje takie $f_1 \in F$, że $0 \leqslant f_1 \leqslant f$ i $Vf_1 = g$, Niech F i G będą przestrzeniami Riesza i niech $V\colon F \to G$ będzie dodatnim operatorem liniowym.

Mówimy, że V ma *własność Maharam* jeśli dla każdych $f \in F$ i $g \in G$ spełniających $f \geqslant 0$ and $0 \leqslant g \leqslant Vf$ istnieje takie $f_1 \in F$, że $0 \leqslant f_1 \leqslant f$ i $Vf_1 = g$, tzn. dla każdego dodatniego $f \in F$ przedział $[0, Vf]$ jest zawarty w zbiorze $V([0, f])$.

Twierdzenie (Luxemburg-Schep)

Załózmy, że F i G to zupełne w sensie Dedekinda przestrzenie Riesza i $V\colon F \to G$ to dodatni operator liniowy porządkowo ciągły. Wówczas operator V posiada własność Maharam wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego operatora $T\colon F \to G$ spełniającego $0 \leqslant T \leqslant V$ istnieje taki ortomorfizm π przestrzeni F, że $0 \leqslant \pi \leqslant I$ i $T = V \circ \pi$.

twierdzenie Luxemburga-Schepa

Twierdzenie (Luxemburg-Schep)

Załózmy, że F i G to zupełne w sensie Dedekinda przestrzenie Riesza i $V\colon F \to G$ to dodatni operator liniowy porządkowo ciągły. Wówczas operator V posiada własność Maharam wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego operatora $T\colon F \to G$ spełniającego $0 \leqslant T \leqslant V$ istnieje taki ortomorfizm π przestrzeni F, że $0 \leqslant \pi \leqslant I$ i $T = V \circ \pi$.

Twierdzenie (Luxemburg-Schep)

Załózmy, że F i G to zupełne w sensie Dedekinda przestrzenie Riesza i $V\colon F \to G$ to dodatni operator liniowy porządkowo ciągły. Wówczas operator V posiada własność Maharam wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego operatora $T\colon F \to G$ spełniającego $0 \leqslant T \leqslant V$ istnieje taki ortomorfizm π przestrzeni F, że $0 \leqslant \pi \leqslant I$ i $T = V \circ \pi$.

To jest operatorowa wersja tezy twierdzenia Radona-Nikodyma.

Twierdzenie (Luxemburg-Schep)

Załózmy, że F i G to zupełne w sensie Dedekinda przestrzenie Riesza i $V\colon F \to G$ to dodatni operator liniowy porządkowo ciągły. Wówczas operator V posiada własność Maharam wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego operatora $T\colon F \to G$ spełniającego $0 \leqslant T \leqslant V$ istnieje taki ortomorfizm π przestrzeni F, że $0 \leqslant \pi \leqslant I$ i $T = V \circ \pi$.

To jest operatorowa wersja tezy twierdzenia Radona-Nikodyma.

Twierdzenie dualne: warunek dostateczny faktoryzacji $T = \pi \circ V$.

Czy z twierdzenia Luxemburga-Schepa wynika twierdzenie Radona-Nikodyma?

Czy z twierdzenia Luxemburga-Schepa wynika twierdzenie Radona-Nikodyma?

Przykład ortomorfizmu to operator mnożenia przez element:

$$\pi(f)(x) = f(x) \cdot g(x), \tag{1}$$

z pewną funkcją g

Czy z twierdzenia Luxemburga-Schepa wynika twierdzenie Radona-Nikodyma?

Przykład ortomorfizmu to operator mnożenia przez element:

$$\pi(f)(x) = f(x) \cdot g(x), \tag{1}$$

z pewną funkcją g (np. jeśli dziedziną π jest $C(X)$, to $g \in C(X)$; jeśli jest L^1, to $g \in L^\infty$).

Czy z twierdzenia Luxemburga-Schepa wynika twierdzenie Radona-Nikodyma?

Przykład ortomorfizmu to operator mnożenia przez element:

$$\pi(f)(x) = f(x) \cdot g(x), \tag{1}$$

z pewną funkcją g (np. jeśli dziedziną π jest $C(X)$, to $g \in C(X)$; jeśli jest L^1, to $g \in L^\infty$).
Żeby wywnioskować twierdzenie Radona-Nikodyma z twierdzenia Luxemburga-Schepa potrzebujemy wiedzieć, że każdy ortomorfizm przestrzeni $L^1(\mu)$ ma postać (1) dla pewnej funkcji $g \in L^\infty$ (będącą pochodną Radona-Nikodyma).

Bardzo ogólne twierdzenie:

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω i ponadto każdy ortomorfizm przestrzeni $C(\Omega)$ ma postać (1).

reprezentacja ortomorfizmów

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω i ponadto każdy ortomorfizm przestrzeni $C(\Omega)$ ma postać (1).

A. Bigard, K. Keimel, *Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien*, Bull. Soc. Math. Fr. 97 (1969), 381–398.

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω i ponadto każdy ortomorfizm przestrzeni $C(\Omega)$ ma postać (1).

A. Bigard, K. Keimel, *Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien*, Bull. Soc. Math. Fr. 97 (1969), 381–398.

P.F. Conrad, J.E. Diem, *The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group*, Ill. J. Math. 15 (1971), 222–240.

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω i ponadto każdy ortomorfizm przestrzeni $C(\Omega)$ ma postać (1).

- A. Bigard, K. Keimel, *Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien*, Bull. Soc. Math. Fr. 97 (1969), 381–398.
- P.F. Conrad, J.E. Diem, *The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group*, Ill. J. Math. 15 (1971), 222–240.

Bardzo ogólne twierdzenie: każda archimedesowska przestrzeń Riesza jest izomorficzna do podprzestrzeni $C(\Omega)$ dla pewnej ekstremalnie niespójnej (tj. domknięcie każdego zbioru otwartego jest otwarte) i zwartej przestrzeni Hausforffa Ω i ponadto każdy ortomorfizm przestrzeni $C(\Omega)$ ma postać (1).

A. Bigard, K. Keimel, *Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien*, Bull. Soc. Math. Fr. 97 (1969), 381–398.

P.F. Conrad, J.E. Diem, *The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group*, Ill. J. Math. 15 (1971), 222–240.

Z powyższego **nie** wynika, że każdy ortomorfizm przestrzeni wyjściowej musi być operatorem mnożenia.

A.C. Zaanen udowodnił w 1975, że każdy ortomorfizm przestrzeni $L^p(X)$ dla $0 < p < \infty$ ma postać (1) (również dla $C([a,b])$, $C_c(\mathbb{R})$ i innych przestrzeni).

A.C. Zaanen udowodnił w 1975, że każdy ortomorfizm przestrzeni $L^p(X)$ dla $0 < p < \infty$ ma postać (1) (również dla $C([a,b])$, $C_c(\mathbb{R})$ i innych przestrzeni).

A.C. Zaanen, *Examples of orthomorphisms*, J. Approx. Theory, 13 (1975), 194–204.

twierdzenia faktoryzacyjne W. Arendta

Wolfgang Arendt, *Factorization by lattice homomorphisms*, Math. Z., 185 (1984), 567–571.

Twierdzenie (Arendt)

Niech E będzie przestrzenią Riesza zupełną w sensie Dedekinda, F, G będą przestrzeniami Riesza i $V: F \to G$ homomorfizmem przestrzeni Riesza. Wówczas, dla danego dodatniego operatora liniowego $S: G \to E$, każdy dodatni operator liniowy $T: F \to E$ spełniający $T \leqslant S \circ V$ dopuszcza faktoryzację

$$T = S_1 \circ V,$$

gdzie $S_1: G \to E$ jest takim operatorem liniowym, że $0 \leqslant S_1 \leqslant S$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "T"] \arrow[d, "V"'] & E \\ G \arrow[ur, "S"] \arrow[ur, bend right, "S_1"'] & \end{tikzcd}$$

twierdzenia faktoryzacyjne W. Arendta

Twierdzenie (Arendt)

Niech E, F i G będą kratami Banacha i załóżmy, ze G na normę porządkowo ciągłą. Niech $U\colon G \to F$ będzie dodatnim operatorem liniowym zachowującym przedziały. Wówczas, dla danego dodatniego operatora liniowego $S\colon E \to G$, każdy dodatni operator liniowy $T\colon E \to F$ spełniający $T \leqslant U \circ S$ dopuszcza faktoryzację

$$T = U \circ S_1,$$

gdzie $S_1\colon E \to G$ jest takim operatorem liniowym, że $0 \leqslant S_1 \leqslant S$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"] \arrow[dr, bend right, "S_1"'] & F \\
 & G \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

Przyjmując w drugim twierdzeniu Arendta $E = G$ i $S = I$ otrzymujemy tezę twierdzenia Luxemburga-Schepa (w kratach Banacha, dla operatora zachowującego przedziały).

związek z twierdzeniem Luxemburga-Schepa

Przyjmując w drugim twierdzeniu Arendta $E = G$ i $S = I$ otrzymujemy tezę twierdzenia Luxemburga-Schepa (w kratach Banacha, dla operatora zachowującego przedziały).

Przyjmując w pierwszym twierdzeniu Arendta $E = G$ i $S = I$ otrzymujemy tezę dualnego twierdzenia Luxemburga-Schepa (dla homomorfizmu przestrzeni Riesza).

Niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}(G)$ będzie reprezentacją półgrupy X w półgrupie $\mathrm{End}(G)$ endomorfizmów pewnej grupy G.

Niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}(G)$ będzie reprezentacją półgrupy X w półgrupie $\mathrm{End}(G)$ endomorfizmów pewnej grupy G. Piszemy Φ_s zamiast $\Phi(s)$ dla $s \in X$.

Niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}(G)$ będzie reprezentacją półgrupy X w półgrupie $\mathrm{End}(G)$ endomorfizmów pewnej grupy G. Piszemy Φ_s zamiast $\Phi(s)$ dla $s \in X$. Zatem:

$$\Phi_{st} = \Phi_s \circ \Phi_t, \quad s, t \in X.$$

Niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}(G)$ będzie reprezentacją półgrupy X w półgrupie $\mathrm{End}(G)$ endomorfizmów pewnej grupy G. Piszemy Φ_s zamiast $\Phi(s)$ dla $s \in X$. Zatem:

$$\Phi_{st} = \Phi_s \circ \Phi_t, \quad s, t \in X.$$

Jeśli X jest grupą, to ponadto

$$\Phi_{s^{-1}} = (\Phi_s)^{-1}, \quad s \in X;$$

Niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}(G)$ będzie reprezentacją półgrupy X w półgrupie $\mathrm{End}(G)$ endomorfizmów pewnej grupy G.
Piszemy Φ_s zamiast $\Phi(s)$ dla $s \in X$. Zatem:

$$\Phi_{st} = \Phi_s \circ \Phi_t, \quad s, t \in X.$$

Jeśli X jest grupą, to ponadto

$$\Phi_{s^{-1}} = (\Phi_s)^{-1}, \quad s \in X;$$

w szczególności, każdy Φ_s jest odwracalny.

Grupa z porządkiem kratowym zgodnym z działaniem grupowym nazywa się ℓ-grupą.

Grupa z porządkiem kratowym zgodnym z działaniem grupowym nazywa się ℓ-grupą.
Odwzorowanie $f\colon G \to F$ między ℓ-grupami nazywamy *monotonicznym* jeśli

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$.

Grupa z porządkiem kratowym zgodnym z działaniem grupowym nazywa się ℓ-grupą.
Odwzorowanie $f\colon G \to F$ między ℓ-grupami nazywamy *monotonicznym* jeśli

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$.
f nazywamy Φ-*niezmienniczym* jeśli $f \circ \Phi_s = f$ dla wszystkich $s \in X$.

Grupa z porządkiem kratowym zgodnym z działaniem grupowym nazywa się ℓ-grupą.
Odwzorowanie $f\colon G \to F$ między ℓ-grupami nazywamy *monotonicznym* jeśli

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in G$.
f nazywamy Φ-*niezmienniczym* jeśli $f \circ \Phi_s = f$ dla wszystkich $s \in X$.
Porządek w zbiorze odwzorowań (np. addytywnych) między grupami uporządkowanymi jest następujący: $f \leqslant g$ jeśli $g - f$ jest odwzorowaniem monotonicznym.

Niech E będzie przestrzenią Riesza zupełną w sensie Dedekinda, i niech F, G będą abelowymi ℓ-grupami. Oznaczmy przez $\mathrm{End}^+(G)$ półgrupę monotonicznych endomorfizmów G, niech X będzie półgrupą dopuszczająca średnią prawostronnie niezmienniczą i niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}^+(G)$ będzie reprezentacją X.

Twierdzenie

Niech $V\colon F \to G$ *będzie takim homomorfizmem* ℓ*-grup, że* $\Phi_s \circ V = V$ *dla wszystkich* $s \in X$*. Wówczas, dla danego addytywnego, monotonicznego i* Φ*-niezmienniczego odwzorowania* $S\colon G \to E$*, każde addytywne, monotoniczne odwzorowanie* $T\colon F \to E$ *spełniające* $T \leqslant S \circ V$ *dopuszcza faktoryzację* $T = S_1 \circ V$*,*

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[r, "T"] \arrow[d, "V"'] & E \\
X \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{End}^+(G) & G \arrow[ur, "S"] \arrow[ur, bend right, "S_1"'] &
\end{tikzcd}$$

gdzie $S_1\colon G \to E$ *jest takim addytywnym i* Φ*-niezmienniczym odwzorowaniem, że* $0 \leqslant S_1 \leqslant S$*.*

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$;

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$.

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$. Określmy $S_0 \colon G_1 \to E$ wzorem:

$$S_0(Vx) := T(x), \quad x \in F.$$

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$. Określmy $S_0 \colon G_1 \to E$ wzorem:

$$S_0(Vx) := T(x), \quad x \in F.$$

S_0 jest dobrze zdefiniowane:

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$. Określmy $S_0 \colon G_1 \to E$ wzorem:

$$S_0(Vx) := T(x), \quad x \in F.$$

S_0 jest dobrze zdefiniowane: załóżmy, ze dla pewnych $x_1, x_2 \in F$ mamy $Vx_1 = Vx_2$.

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$. Określmy $S_0 \colon G_1 \to E$ wzorem:

$$S_0(Vx) := T(x), \quad x \in F.$$

S_0 jest dobrze zdefiniowane: załóżmy, ze dla pewnych $x_1, x_2 \in F$ mamy $Vx_1 = Vx_2$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant |T(x_1) - T(x_2)| = |T(x_1 - x_2)| \leqslant T(|x_1 - x_2|) \\ &\leqslant S(V(|x_1 - x_2|)) = S(|Vx_1 - Vx_2|) = 0. \end{aligned}$$

dowód

Połóżmy $G_1 := V(F)$; G_1 jest podgrupą grupy G z założenia $\Phi_s(G_1) = G_1$ dla wszystkich $s \in X$. Określmy $S_0 \colon G_1 \to E$ wzorem:

$$S_0(Vx) := T(x), \quad x \in F.$$

S_0 jest dobrze zdefiniowane: załóżmy, ze dla pewnych $x_1, x_2 \in F$ mamy $Vx_1 = Vx_2$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant |T(x_1) - T(x_2)| = |T(x_1 - x_2)| \leqslant T(|x_1 - x_2|) \\ &\leqslant S(V(|x_1 - x_2|)) = S(|Vx_1 - Vx_2|) = 0. \end{aligned}$$

Zatem, $T(x_1) = T(x_2)$.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne:

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$,

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$, czyli możemy założyć, że $x \geqslant 0$.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$, czyli możemy założyć, że $x \geqslant 0$. Mamy

$$S_0(y) = S_0(Vx) = T(x) \geqslant 0.$$

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$, czyli możemy założyć, że $x \geqslant 0$. Mamy

$$S_0(y) = S_0(Vx) = T(x) \geqslant 0.$$

Φ-niezmienniczość S_0:

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$, czyli możemy założyć, że $x \geqslant 0$. Mamy

$$S_0(y) = S_0(Vx) = T(x) \geqslant 0.$$

Φ-niezmienniczość S_0: ustalmy $s \in X$.

dowód

S_0 jest addytywne: wprost z określenia.
S_0 jest monotoniczne: wystarczy wykazać, że $S_0(y) \geqslant 0$ jeśli $y \geqslant 0$ on G_1. Ustalmy taki $y \in G_1$, że $y \geqslant 0$. Ustalmy taki punkt $x \in F$, że $Vx = y$.
Skoro $Vx \geqslant 0$, więc $Vx = (Vx)^+ = V(x^+)$, czyli możemy założyć, że $x \geqslant 0$. Mamy

$$S_0(y) = S_0(Vx) = T(x) \geqslant 0.$$

Φ-niezmienniczość S_0: ustalmy $s \in X$.
$S_0(\Phi_s(Vx)) = S_0(Vx)$ dla wszystkich $x \in F$.

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne:

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

$$\begin{aligned} p(y_1 + y_2) &= S((y_1 + y_2)^+) \leqslant S(y_1^+ + y_2^+) \\ &= S(y_1^+) + S(y_2^+) = p(y_1) + p(y_2). \end{aligned}$$

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

$$\begin{aligned} p(y_1 + y_2) &= S((y_1 + y_2)^+) \leqslant S(y_1^+ + y_2^+) \\ &= S(y_1^+) + S(y_2^+) = p(y_1) + p(y_2). \end{aligned}$$

p jest monotoniczne:

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

$$\begin{aligned} p(y_1 + y_2) &= S((y_1 + y_2)^+) \leqslant S(y_1^+ + y_2^+) \\ &= S(y_1^+) + S(y_2^+) = p(y_1) + p(y_2). \end{aligned}$$

p jest monotoniczne: ustalmy takie $y_1, y_2 \in G$, że $y_1 \leqslant y_2$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

$$\begin{aligned} p(y_1 + y_2) &= S((y_1 + y_2)^+) \leqslant S(y_1^+ + y_2^+) \\ &= S(y_1^+) + S(y_2^+) = p(y_1) + p(y_2). \end{aligned}$$

p jest monotoniczne: ustalmy takie $y_1, y_2 \in G$, że $y_1 \leqslant y_2$. Mamy $y_1^+ \leqslant y_2^+$

dowód

Zdefiniujmy odwzorowanie $p\colon G \to E$ wzorem

$$p(y) := S(y^+), \quad y \in G.$$

p jest podaddytywne: dla ustalonych $y_1, y_2 \in G$ mamy $(y_1 + y_2)^+ \leqslant y_1^+ + y_2^+$.

$$\begin{aligned} p(y_1 + y_2) &= S((y_1 + y_2)^+) \leqslant S(y_1^+ + y_2^+) \\ &= S(y_1^+) + S(y_2^+) = p(y_1) + p(y_2). \end{aligned}$$

p jest monotoniczne: ustalmy takie $y_1, y_2 \in G$, że $y_1 \leqslant y_2$. Mamy $y_1^+ \leqslant y_2^+$

$$p(y_1) = S(y_1^+) \leqslant S(y_2^+) = p(y_2).$$

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze:

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$.

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$. Skoro $(\Phi_s y)^+ \leqslant \Phi_s(y^+)$, więc

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$. Skoro $(\Phi_s y)^+ \leqslant \Phi_s(y^+)$, więc

$$p(\Phi_s(y)) = S((\Phi_s y)^+) \leqslant S(\Phi_s(y^+)) = S(y^+) = p(y).$$

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$. Skoro $(\Phi_s y)^+ \leqslant \Phi_s(y^+)$, więc

$$p(\Phi_s(y)) = S((\Phi_s y)^+) \leqslant S(\Phi_s(y^+)) = S(y^+) = p(y).$$

Odwzorowanie S_0 jest majoryzowane przez p na grupie G_1:

dowód

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$. Skoro $(\Phi_s y)^+ \leqslant \Phi_s(y^+)$, więc

$$p(\Phi_s(y)) = S((\Phi_s y)^+) \leqslant S(\Phi_s(y^+)) = S(y^+) = p(y).$$

Odwzorowanie S_0 jest majoryzowane przez p na grupie G_1: ustalmy $y \in G_1$ i $x \in F$ spełniające $y = Vx$.

p jest Φ-podniezmiennicze: ustalmy $s \in X$ and $y \in G$. Skoro $(\Phi_s y)^+ \leqslant \Phi_s(y^+)$, więc

$$p(\Phi_s(y)) = S((\Phi_s y)^+) \leqslant S(\Phi_s(y^+)) = S(y^+) = p(y).$$

Odwzorowanie S_0 jest majoryzowane przez p na grupie G_1: ustalmy $y \in G_1$ i $x \in F$ spełniające $y = Vx$. Mamy

$$\begin{aligned} S_0(y) = S_0(Vx) = T(x) \leqslant T(x^+) \leqslant S(V(x^+)) \\ = S((Vx)^+) = S(y^+) = p(y). \end{aligned}$$

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

Istnieje taka funkcja addytywna, monotoniczna i Φ-niezmiennicza $S_1 : G \to E$, że S_0 and S_1 pokrywają się na G_1 oraz $S_1 \leqslant p$ na G.

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

Istnieje taka funkcja addytywna, monotoniczna i Φ-niezmiennicza $S_1 : G \to E$, że S_0 and S_1 pokrywają się na G_1 oraz $S_1 \leqslant p$ na G.
$T = S_1 \circ V$ wynika z definicji S_0 i z tego, że S_1 jest rozszerzeniem S_0.

dowód

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

Istnieje taka funkcja addytywna, monotoniczna i Φ-niezmiennicza $S_1 : G \to E$, że S_0 and S_1 pokrywają się na G_1 oraz $S_1 \leqslant p$ na G.
$T = S_1 \circ V$ wynika z definicji S_0 i z tego, że S_1 jest rozszerzeniem S_0.
$S_1 \leqslant S$:

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

Istnieje taka funkcja addytywna, monotoniczna i Φ-niezmiennicza $S_1 : G \to E$, że S_0 and S_1 pokrywają się na G_1 oraz $S_1 \leqslant p$ na G.
$T = S_1 \circ V$ wynika z definicji S_0 i z tego, że S_1 jest rozszerzeniem S_0.
$S_1 \leqslant S$: ustalmy takie $y \in G$, że $y \geqslant 0$.

Wykorzystamy twierdzenie typu Hahna-Banacha udowodnione przez Zbigniewa Gajdę.

Zbigniew Gajda, *Sandwich theorems and amenable semigroups of transformations*, Grazer Math. Ber., 316 (1992), 43–58.

Istnieje taka funkcja addytywna, monotoniczna i Φ-niezmiennicza $S_1 : G \to E$, że S_0 and S_1 pokrywają się na G_1 oraz $S_1 \leqslant p$ na G.
$T = S_1 \circ V$ wynika z definicji S_0 i z tego, że S_1 jest rozszerzeniem S_0.
$S_1 \leqslant S$: ustalmy takie $y \in G$, że $y \geqslant 0$. Mamy

$$S_1(y) \leqslant p(y) = S(y^+) = S(y). \qquad \square$$

wynik 2

Niech G będzie przestrzenią Riesza zupełną w sensie Dedekinda, i niech E, F będą abelowymi ℓ-grupami. Niech X będzie grupą dopuszczająca średnią prawostronnie niezmienniczą i niech $\Phi\colon X \to \mathrm{End}^+(E)$ będzie reprezentacją X.

wynik 2

Twierdzenie

Niech $U\colon G \to F$ będzie iniektywnym homomorfizmem ℓ-grup. Wówczas, dla danego addytywnego, monotonicznego i Φ-niezmienniczego odwzorowania $S\colon E \to G$, każde addytywne, monotoniczne, Φ-niezmiennicze odwzorowanie $T\colon E \to F$ spełniające $T \leqslant U \circ S$ dopuszcza faktoryzację $T = U \circ S_1$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{End}^+(E) & E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"] \arrow[dr, bend right, "S_1"'] & F \\ & & & G \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

gdzie $S_1\colon E \to G$ jest takim addytywnym i Φ-niezmienniczym odwzorowaniem, że $0 \leqslant S_1 \leqslant S$.

Załóżmy, że E, F i G to kraty Banacha i G ma normę porządkowo ciągłą. Niech X będzie półgrupą dopuszczająca średnią prawostronnie niezmienniczą i niech $\Phi\colon X \to \mathcal{L}_p(G)$ będzie reprezentacją X w zbiorze wszystkich dodatnich operatorów liniowych typu $G \to G$.

wynik 3

Twierdzenie

Niech $U\colon G \to F$ będzie dodatnim operatorem liniowym zachowującym przedziały i Φ-niezmienniczym. Wówczas, dla danego dodatniego operatora liniowego $S\colon E \to G$ spełniającego $\Phi_s \circ S = S$ dla wszystkich $s \in X$, każdy dodatni operator liniowy $T\colon E \to F$ spełniający $T \leqslant U \circ S$ dopuszcza faktoryzację $T = U \circ S_1$,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"] \arrow[dr, bend right, "S_1"'] & F & & \\
 & G \arrow[u, "U"'] & \mathcal{L}_p(G) & X \arrow[l, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

gdzie $S_1\colon E \to G$ jest takim operatorem liniowym, że $0 \leqslant S_1 \leqslant S$ and $\Phi_s \circ S_1 = S_1$ dla wszystkich $s \in X$.

Załóżmy, że E, F i G to kraty Banacha i E ma normę porządkowo ciągłą. Niech X będzie półgrupą dopuszczająca średnią prawostronnie niezmienniczą i niech $\Phi\colon X \to \mathcal{L}_p(E)$ będzie reprezentacją X w zbiorze wszystkich dodatnich operatorów liniowych typu $E \to E$.

Twierdzenie

Niech $V\colon F \to G$ będzie iniektywnym dodatnim operatorem liniowym zachowującym przedziały. Wówczas, dla danego dodatniego operatora liniowego $S\colon G \to E$ spełniającego $\Phi_s \circ S = S$ dla wszystkich $s \in X$, każdy dodatni operator liniowy $T\colon E \to F$ spełniający $T \leqslant S \circ V$ oraz $\Phi_s \circ T = T$ dla wszystkich $s \in X$ dopuszcza faktoryzację $T = S_1 \circ V$,

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "T"] \arrow[d, "V"'] & E & \mathcal{L}_p(E) & X \arrow[l, "\Phi"'] \\
G \arrow[ur, "S"] \arrow[ur, bend right, "S_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $S_1\colon G \to E$ jest takim operatorem liniowym, że $0 \leqslant S_1 \leqslant S$ i $\Phi_s \circ S_1 = S_1$ dla wszystkich $s \in X$.

W. F., *Factorization theorems of Arendt type for additive monotone mappings*, Nonlinear Anal. 97 (2014), 138—144.

W. F., *Factorization theorems of Arendt type for additive monotone mappings*, Nonlinear Anal. 97 (2014), 138—144.

W. F., *Factorization theorems of Arendt type for additive monotone mappings*, Nonlinear Anal. 97 (2014), 138—144.

Dziękuję za uwagę!!!