Typ potęgowy Szlenka

Szymon Draga

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki
Podlesice, 22–26 września 2014 r.

Motywacja

Pytanie (Banach–Mazur, Księga Szkocka, Problem 49)

Czy istnieje ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha (izomorficznie) uniwersalna dla wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha?

Motywacja

Pytanie (Banach–Mazur, Księga Szkocka, Problem 49)

Czy istnieje ośrodkowa i refleksywna przestrzeń Banacha (izomorficznie) uniwersalna dla wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha?

Odpowiedź (Szlenk, 1968)

Jeżeli X jest przestrzenią Banacha (izomorficznie) uniwersalną dla wszystkich ośrodkowych i refleksywnych przestrzeni Banacha, to przestrzeń X^* jest nieośrodkowa; w szczególności przestrzeń X nie może być ośrodkowa i refleksywna.

Definicje

Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $K \subset X^*$ zbiorem $*$-słabo zwartym. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy

$$\mathrm{s}_\varepsilon K = K \setminus \bigcup \{V \colon V \text{ jest zbiorem } *\text{-słabo otwartym}, \\ \operatorname{diam} V \cap K < \varepsilon\}.$$

Definicje

Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $K \subset X^*$ zbiorem $*$-słabo zwartym. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy

$$\mathsf{s}_\varepsilon K = K \setminus \bigcup \{V \colon V \text{ jest zbiorem } *\text{-słabo otwartym}, \\ \operatorname{diam} V \cap K < \varepsilon\}.$$

Dla następnikowej liczby porządkowej $\alpha = \beta + 1$ definiujemy

$$\mathsf{s}_\varepsilon^\alpha = \mathsf{s}_\varepsilon \left(\mathsf{s}_\varepsilon^\beta K \right),$$

Definicje

Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $K \subset X^*$ zbiorem $*$-słabo zwartym. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy

$$\mathsf{s}_\varepsilon K = K \setminus \bigcup \{V \colon V \text{ jest zbiorem } *\text{-słabo otwartym}, \\ \operatorname{diam} V \cap K < \varepsilon\}.$$

Dla następnikowej liczby porządkowej $\alpha = \beta + 1$ definiujemy

$$\mathsf{s}_\varepsilon^\alpha = \mathsf{s}_\varepsilon \left(\mathsf{s}_\varepsilon^\beta K \right),$$

zaś dla granicznej liczby porządkowej α

$$\mathsf{s}_\varepsilon^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \mathsf{s}_\varepsilon^\beta K.$$

Definicje cd.

Dalej definiujemy

$$\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) = \min\{\alpha \colon \mathrm{s}_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \emptyset\}$$

oraz

$$\mathrm{Sz}(X) = \sup\{\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \colon \varepsilon > 0\};$$

Definicje cd.

Dalej definiujemy

$$\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) = \min\{\alpha \colon \mathrm{s}_\varepsilon^\alpha B_{X^*} = \emptyset\}$$

oraz

$$\mathrm{Sz}(X) = \sup\{\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \colon \varepsilon > 0\};$$

liczbę $\mathrm{Sz}(X)$ nazywamy *indeksem Szlenka* przestrzeni X.

Przykłady

- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej X.

Przykłady

- $\operatorname{Sz}(X) = 1$ dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej X.
- $\operatorname{Sz}(c_0) = \omega$.

Przykłady

- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej X.
- $\mathrm{Sz}(c_0) = \omega$.
- Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią superrefleksywną, to $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.

Przykłady

- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej X.
- $\mathrm{Sz}(c_0) = \omega$.
- Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią superrefleksywną, to $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.
- $\mathrm{Sz}\left(\mathcal{C}\left[0, \omega^{\omega^{\alpha}}\right]\right) = \omega^{\alpha+1}$ dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$.

Przykłady

- $\diamond$ $\mathrm{Sz}(X) = 1$ dla każdej przestrzeni skończenie wymiarowej X.
- $\diamond$ $\mathrm{Sz}(c_0) = \omega$.
- $\diamond$ Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią superrefleksywną, to $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.
- $\diamond$ $\mathrm{Sz}\left(\mathcal{C}\left[0, \omega^{\omega^{\alpha}}\right]\right) = \omega^{\alpha+1}$ dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$.
- $\diamond$ $\mathrm{Sz}\left(\mathcal{C}\left[0, \omega_1\right]\right) = \omega^{\omega_1+1}$.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.
- $\mathrm{Sz}_{\varepsilon}(X)$ zawsze jest liczbą następnikową.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.
- $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ zawsze jest liczbą następnikową.
- $\mathrm{Sz}(X) = \omega^\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej α.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.
- $\mathrm{Sz}_{\varepsilon}(X)$ zawsze jest liczbą następnikową.
- $\mathrm{Sz}(X) = \omega^{\alpha}$ dla pewnej liczby porządkowej α.
- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią skończenie wymiarową.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.
- $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ zawsze jest liczbą następnikową.
- $\mathrm{Sz}(X) = \omega^\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej α.
- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią skończenie wymiarową.
- Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni X, $\mathrm{Sz}(X) = \omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) < \omega$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Podstawowe własności

- Indeks Szlenka jest poprawnie zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Asplunda.
- $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ zawsze jest liczbą następnikową.
- $\mathrm{Sz}(X) = \omega^\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej α.
- $\mathrm{Sz}(X) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią skończenie wymiarową.
- Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni X, $\mathrm{Sz}(X) = \omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) < \omega$ dla każdego $\varepsilon > 0$.
- $\mathrm{Sz}_{\varepsilon\eta}(X) \leqslant \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)\mathrm{Sz}_\eta(X)$ dla wszelkich $\varepsilon, \eta > 0$.

Typ potęgowy Szlenka

Lemat

Jeżeli $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *jest rosnącą funkcją podaddytywną, to istnieje skończona granica* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Typ potęgowy Szlenka

Lemat

Jeżeli $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *jest rosnącą funkcją podaddytywną, to istnieje skończona granica* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Twierdzenie

Jeżeli $\mathrm{Sz}(X) = \omega$, *to istnieje taka liczba* $p \in [1, \infty)$, *że dla każdej liczby* $r \in (p, \infty)$ *mamy*

$$\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \leqslant C\varepsilon^{-r} \qquad \text{dla } \varepsilon \in (0, 1),$$

gdzie C *jest stałą.*

Typ potęgowy Szlenka

Lemat

Jeżeli $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *jest rosnącą funkcją podaddytywną, to istnieje skończona granica* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Twierdzenie

Jeżeli $\mathrm{Sz}(X) = \omega$*, to istnieje taka liczba* $p \in [1, \infty)$*, że dla każdej liczby* $r \in (p, \infty)$ *mamy*

$$\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \leqslant C\varepsilon^{-r} \quad \text{dla } \varepsilon \in (0, 1),$$

gdzie C *jest stałą.*

Liczbę p nazywamy wówczas *typem potęgowym Szlenka* przestrzeni X i oznaczamy $\mathrm{p}(X)$.

Szkic dowodu

Ponieważ funkcja $\varepsilon \mapsto \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ jest malejąca i podmultiplikatywna, funkcja

$$x \mapsto \ln \mathrm{Sz}_{\mathrm{e}^{-x}}(X)$$

jest rosnąca i podaddytywna. Na mocy lematu istnieje granica

$$p := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)}{|\ln \varepsilon|}.$$

Szkic dowodu

Ponieważ funkcja $\varepsilon \mapsto \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ jest malejąca i podmultiplikatywna, funkcja

$$x \mapsto \ln \mathrm{Sz}_{\mathrm{e}^{-x}}(X)$$

jest rosnąca i podaddytywna. Na mocy lematu istnieje granica

$$p := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)}{|\ln \varepsilon|}.$$

Jeżeli $r > p$, to $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \leqslant \varepsilon^{-r}$ w pewnym prawostronnym otoczeniu zera. Istnienie stałej z tezy wynika z faktu, że dla pozostałych wartości ε indeks $\mathrm{Sz}_\varepsilon(X)$ przyjmuje jedynie skończenie wiele wartości.

Podstawowe własności

Załóżmy, że $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.

- $\mathrm{p}(X) = \inf\{q > 0 \colon \sup\{\varepsilon^q \,\mathrm{Sz}_\varepsilon(X) \colon \varepsilon \in (0,1)\} < \infty\}$.

Podstawowe własności

Załóżmy, że $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.

- $\mathrm{p}(X) = \inf\{q > 0\colon \sup\{\varepsilon^q \,\mathrm{Sz}_\varepsilon(X)\colon \varepsilon \in (0,1)\} < \infty\}$.
- Jeżeli X i Y są izomorficznymi przestrzeniami Banacha, to $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(X) = \mathrm{p}(Y)$.

Podstawowe własności

Załóżmy, że $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.

- $\mathrm{p}(X) = \inf\{q > 0\colon \sup\{\varepsilon^q \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)\colon \varepsilon \in (0,1)\} < \infty\}$.
- Jeżeli X i Y są izomorficznymi przestrzeniami Banacha, to $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(X) = \mathrm{p}(Y)$.
- Niech Y będzie (domkniętą) podprzestrzenią przestrzeni X.

Jeżeli $\dim(Y) = \infty$, to $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(Y) \leqslant \mathrm{p}(X)$.

Podstawowe własności

Załóżmy, że $\mathrm{Sz}(X) = \omega$.

- $\mathrm{p}(X) = \inf\{q > 0\colon \sup\{\varepsilon^q \mathrm{Sz}_\varepsilon(X)\colon \varepsilon \in (0,1)\} < \infty\}$.
- Jeżeli X i Y są izomorficznymi przestrzeniami Banacha, to $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(X) = \mathrm{p}(Y)$.
- Niech Y będzie (domkniętą) podprzestrzenią przestrzeni X.

  Jeżeli $\dim(Y) = \infty$, to $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(Y) \leqslant \mathrm{p}(X)$.

  Jeżeli $\dim(X/Y) = \infty$, to $\mathrm{Sz}(X/Y) = \omega$ oraz $\mathrm{p}(X/Y) \leqslant \mathrm{p}(X)$.

Przykłady

- $\text{p}(c_0) = 1$, czyli przestrzeń c_0 ma „najlepszy” typ potęgowy Szlenka.

Przykłady

- $\mathrm{p}(c_0) = 1$, czyli przestrzeń c_0 ma „najlepszy” typ potęgowy Szlenka.
- Jeżeli H jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, to $\mathrm{p}(H) = 2$.

Przykłady

- $\mathrm{p}(c_0) = 1$, czyli przestrzeń c_0 ma „najlepszy” typ potęgowy Szlenka.
- Jeżeli H jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, to $\mathrm{p}(H) = 2$.
- $\mathrm{p}(\ell_p) = q$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Przykłady

- $\mathrm{p}(c_0) = 1$, czyli przestrzeń c_0 ma „najlepszy” typ potęgowy Szlenka.
- Jeżeli H jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, to $\mathrm{p}(H) = 2$.
- $\mathrm{p}(\ell_p) = q$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Uwaga

Z ostatniego przykładu wynika, że nie istnieje superrefleksywna przestrzeń Banacha, która byłaby (izomorficznie) uniwersalna dla wszystkich przestrzeni ośrodkowych i superrefleksywnych.

Pytania

- Wiadomo [2], że $\mathrm{Sz}(\mathcal{K}(\ell_2)) = \omega$, gdzie $\mathcal{K}(\ell_2)$ jest przestrzenią operatorów zwartych na ℓ_2. Ile wynosi $\mathrm{p}(\mathcal{K}(\ell_2))$?

Pytania

- Wiadomo [2], że $\mathrm{Sz}(\mathcal{K}(\ell_2)) = \omega$, gdzie $\mathcal{K}(\ell_2)$ jest przestrzenią operatorów zwartych na ℓ_2. Ile wynosi $\mathrm{p}(\mathcal{K}(\ell_2))$?

- Niech Y będzie (domkniętą) podprzestrzenią przestrzeni X. Wiadomo [1], że jeżeli $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{Sz}(X/Y) = \omega$, to $\mathrm{Sz}(X) = \omega$. Czy prawdą jest, że jeżeli $\mathrm{p}(Y) = p$ oraz $\mathrm{p}(X/Y) = p$, to także $\mathrm{p}(X) = p$?

Pytania

- Wiadomo [2], że $\mathrm{Sz}(\mathcal{K}(\ell_2)) = \omega$, gdzie $\mathcal{K}(\ell_2)$ jest przestrzenią operatorów zwartych na ℓ_2. Ile wynosi $\mathrm{p}(\mathcal{K}(\ell_2))$?

- Niech Y będzie (domkniętą) podprzestrzenią przestrzeni X. Wiadomo [1], że jeżeli $\mathrm{Sz}(Y) = \omega$ oraz $\mathrm{Sz}(X/Y) = \omega$, to $\mathrm{Sz}(X) = \omega$. Czy prawdą jest, że jeżeli $\mathrm{p}(Y) = p$ oraz $\mathrm{p}(X/Y) = p$, to także $\mathrm{p}(X) = p$?

Uwaga

Odpowiedź na drugie pytanie jest twierdząca, o ile Y jest podprzestrzenią komplementarną.

P.A.H. Brooker, G. Lancien: *Three-space property for asymptotically uniformly smooth renormings*. J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 867–871.

R. Causey: *Estimation of the Szlenk index of Banach Spaces via Schreier spaces*. Studia Math. **216** (2013), 149–178.

G. Lancien: *A survey on the Szlenk index and some of its applications*. Rev. R. Acad. Cien Serie A. Mat. **100** (2006), 209–235.