# Przeliczalna struktura adekwatna dla fuzji systemów

Sławomir Kost

Zakład Logiki Matematycznej

25 września 2014

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.

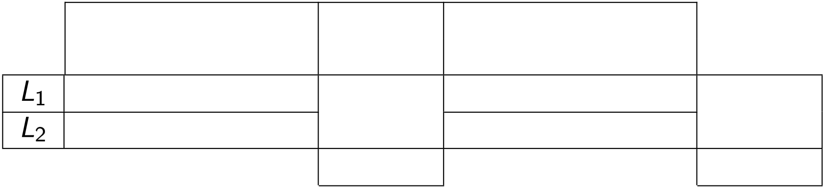
- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym



- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym

| | Charakteryzowana przez klasę | | | |
|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | $\mathcal{C}_1$ | | | |
| $L_2$ | $\mathcal{C}_2$ | | | |
| | | | | |

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym

<table>
<tr><td></td><td>Charakteryzowana przez klasę</td><td>Kracht Wolter</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$L_1$</td><td>$\mathcal{C}_1$</td><td rowspan="2">$\mathcal{C}_0$</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$L_2$</td><td>$\mathcal{C}_2$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$L_1 \otimes L_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym

<table>
<tr><td></td><td>Charakteryzowana przez klasę</td><td>Kracht Wolter</td><td>Charakteryzowana przez strukturę</td><td></td></tr>
<tr><td>$L_1$</td><td>$\mathcal{C}_1$</td><td rowspan="2">$\mathcal{C}_0$</td><td>$\mathcal{F}_1$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$L_2$</td><td>$\mathcal{C}_2$</td><td>$\mathcal{F}_2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$L_1 \otimes L_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

- Wiele systemów jednodalnych posiada adekwatne rodziny struktur Kripkego, pojedynczą strukturę spójną np. $S5$, $Grz.3$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$.
- Jak znaleźć pojedynczą strukturę spójną adekwatną dla systemu dwumodalnego $L_1 \otimes L_2$?
- Struktura kanoniczna (trudna w opisie i zastosowaniu, $Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym)
- $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie jest systemem kanonicznym

<table>
<tr><td></td><td>Charakteryzowana przez klasę</td><td>Kracht Wolter</td><td>Charakteryzowana przez strukturę</td><td></td></tr>
<tr><td>$L_1$</td><td>$\mathcal{C}_1$</td><td rowspan="2">$\mathcal{C}_0$</td><td>$\mathcal{F}_1$</td><td rowspan="2">$\mathcal{F}_0$</td></tr>
<tr><td>$L_2$</td><td>$\mathcal{C}_2$</td><td>$\mathcal{F}_2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$L_1 \otimes L_2$</td><td></td><td>$L_1 \otimes L_2$</td></tr>
</table>

# Informacje wstępne

## Język 2-modalny

Przez $\mathcal{ML}_2$ oznaczamy język 2-modalny. Jego alfabet składa się z:

- nieskończonego, przeliczalnego zbioru zmiennych zdaniowych $p, q, r, \ldots$;
- stałych logicznych: $\top$(prawda) oraz $\bot$(fałsz);
- spójników logicznych: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ oraz $\neg$;
- operatorów modalnych: $\Box_i$ oraz $\Diamond_i$ dla $i = 1, 2$
- symboli: ) oraz (.

# Informacje wstępne

### $\mathcal{ML}_2$-formuła

Pojęcie $\mathcal{ML}_2$-formuły definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

- wszystkie zmienne zdaniowe i stałe logiczne są $\mathcal{ML}_2$-formułami;
- jeśli $\varphi$ oraz $\psi$ są $\mathcal{ML}_2$-formułami, to również $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$, $(\Box_i\varphi)$ oraz $(\Diamond_i\varphi)$ (dla $i = 1, 2$) są $\mathcal{ML}_2$-formułami;
- nie ma innych $\mathcal{ML}_2$-formuł;

# Informacje wstępne

## $\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w świecie $x$ modelu $\langle \mathcal{F}, v \rangle$)

Ustalmy strukturę $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ oraz bazujący na niej model $\langle \mathcal{F}, v \rangle$. Relację $\models$ definiujemy indukcyjnie względem budowy formuły:

$$
\begin{array}{lll}
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} p & \text{iff} & x \in v(p); \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \top; & & \\
\not\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \bot & & (\text{nieprawda, że } \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \bot); \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \wedge \varphi & \text{iff} & \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \text{ oraz } \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \varphi; \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \vee \varphi & \text{iff} & \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \text{ lub } \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \varphi; \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \rightarrow \varphi & \text{iff} & \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \psi \Rightarrow \models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \varphi; \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \neg\varphi & \text{iff} & \not\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \varphi; \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \Box_i\varphi & \text{iff} & \models_{\langle \mathcal{F},v,y \rangle} \varphi \text{ dla wszystkich } y \in W,\ xR_iy; \\
\models_{\langle \mathcal{F},v,x \rangle} \Diamond_i\varphi & \text{iff} & \models_{\langle \mathcal{F},v,y \rangle} \varphi \text{ dla pewnego } y \in W,\ xR_iy;
\end{array}
$$

# Informacje wstępne

**$\models_{\langle \mathcal{F}, v \rangle} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w modelu $\langle \mathcal{F}, v \rangle$)**

Niech $\langle \mathcal{F}, v \rangle$ będzie modelem opartym na strukturze $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$. Powiemy, że $\mathcal{ML}_2$-formuła $\varphi$ jest prawdziwa w modelu $\langle \mathcal{F}, v \rangle$ ($\models_{\langle \mathcal{F}, v \rangle} \varphi$), jeśli $\models_{\langle \mathcal{F}, v, x \rangle} \varphi$ dla każdego $x \in W$.

# Informacje wstępne

### $\models_{\langle \mathcal{F}, v\rangle} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w modelu $\langle \mathcal{F}, v\rangle$)

Niech $\langle \mathcal{F}, v\rangle$ będzie modelem opartym na strukturze $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2\rangle$. Powiemy, że $\mathcal{ML}_2$-formuła $\varphi$ jest prawdziwa w modelu $\langle \mathcal{F}, v\rangle$ ($\models_{\langle \mathcal{F}, v\rangle} \varphi$), jeśli $\models_{\langle \mathcal{F}, v, x\rangle} \varphi$ dla każdego $x \in W$.

### $\models_{\mathcal{F}} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w strukturze $\mathcal{F}$)

Powiemy, że $\mathcal{ML}_2$-formuła $\varphi$ jest prawdziwa w strukturze $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2\rangle$ ($\models_{\mathcal{F}} \varphi$), jeśli $\models_{\langle \mathcal{F}, v\rangle} \varphi$ dla każdego modelu bazującego na $\mathcal{F}$.

# Informacje wstępne

**$\models_{\mathcal{C}} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w rodzinie struktur $\mathcal{C}$)**

$\mathcal{ML}_2$-formuła $\varphi$ jest prawdziwa w rodzinie struktur $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}_j; j \in J\}$ ($\models_{\mathcal{C}} \varphi$), jeśli $\models_{\mathcal{F}_i} \varphi$ dla każdego $j \in J$.

# Informacje wstępne

**$\models_{\mathcal{C}} \varphi$ ($\varphi$ jest prawdziwa w rodzinie struktur $\mathcal{C}$)**

$\mathcal{ML}_2$-formuła $\varphi$ jest prawdziwa w rodzinie struktur $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}_j; j \in J\}$ ($\models_{\mathcal{C}} \varphi$), jeśli $\models_{\mathcal{F}_j} \varphi$ dla każdego $j \in J$.

Rodzina struktur $\mathcal{C}$ charakteryzuje system $L$ ($\mathcal{C}$ jest adekwatna dla systemu $L$), gdy dla każdej formuły $\varphi$ prawdziwa jest równoważność:

$$\models_{\mathcal{C}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \vdash_L \varphi$$

# Informacje wstępne

## Struktura spójna

Strukturę $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ nazwiemy spójną, gdy dla różnych $x, y \in W$, istnieje taki ciąg $(x_1, ..., x_{k-1}) \in W^{k-1}$, że

$$xS_1x_1,\ x_1S_2x_2, \ldots,\ x_{k-2}S_{k-1}x_{k-1},\ x_{k-1}S_ky,$$

gdzie $S_j \in \{R_1, R_2, R_1^{-1}, R_2^{-1}\}$ dla $j \in \{1, \ldots, k\}$.

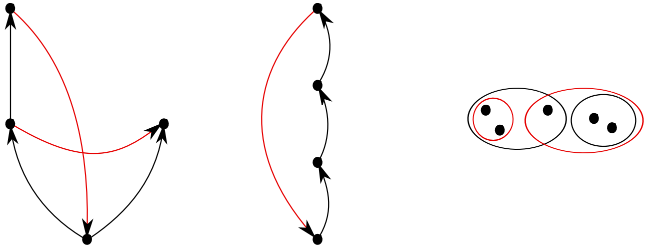
# Informacje wstępne

## Struktura spójna

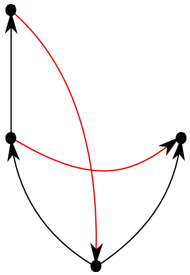
Strukturę $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ nazwiemy spójną, gdy dla różnych $x, y \in W$, istnieje taki ciąg $(x_1, ..., x_{k-1}) \in W^{k-1}$, że

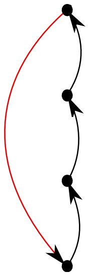
$$xS_1x_1,\ x_1S_2x_2, \ldots,\ x_{k-2}S_{k-1}x_{k-1},\ x_{k-1}S_ky,$$

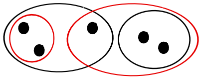
gdzie $S_j \in \{R_1, R_2, R_1^{-1}, R_2^{-1}\}$ dla $j \in \{1, \ldots, k\}$.



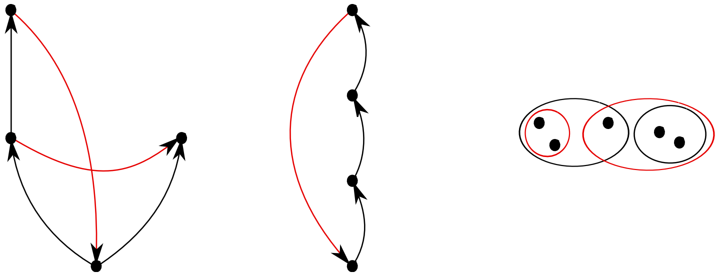
# Informacje wstępne







# Informacje wstępne



Niech $\mathcal{F}_i$, dla $i \in I$, będzie spójną składową struktury $\mathcal{F}$. Jeśli formula $\not\models_{\mathcal{F}} \varphi$ wówczas $\not\models_{\mathcal{F}_{i_0}} \varphi$ dla pewnego $i_0 \in I$. Pozostałe składowe nie mają wpływu na odrzucenie $\varphi$ w $\mathcal{F}_{i_0}$.

# Informacje wstępne

## p-morfizm

Niech $\langle A, S_1, S_2\rangle$ oraz $\langle B, R_1, R_2\rangle$ będą strukturami. Odwzorowanie surjektywne $f : A \longrightarrow B$ nazwiemy p-morfizmem, gdy spełnia ono następujące warunki:

1) jeśli $sS_it$, to $f(s)R_if(t)$
2) jeśli $f(s)R_iu$, to $\exists_t(sS_it \wedge f(t) = u)$

dla $i = 1, 2$.

# Informacje wstępne

## p-morfizm

Niech $\langle A, S_1, S_2\rangle$ oraz $\langle B, R_1, R_2\rangle$ będą strukturami. Odwzorowanie surjektywne $f : A \to B$ nazwiemy p-morfizmem, gdy spełnia ono następujące warunki:

1) jeśli $sS_it$, to $f(s)R_if(t)$
2) jeśli $f(s)R_iu$, to $\exists_t(sS_it \wedge f(t) = u)$

dla $i = 1, 2$.

## LEMAT

Niech $\langle A, S_1, S_2\rangle$ oraz $\langle B, R_1, R_2\rangle$ będą strukturami, między którymi istnieje p-morfizm $f : A \to B$. Wówczas dla każdej $\mathcal{ML}_2$-formuły $\varphi$ prawdziwa jest implikacja:

$$\models_{\langle A,S_1,S_2\rangle} \varphi \;\Rightarrow\; \models_{\langle B,R_1,R_2\rangle} \varphi$$

$S5 \otimes S5$ ✓

$S5 \otimes S5$ ✓

$Grz.3 \otimes Grz.3$ ✓

$S5 \otimes S5$ ✓

$Grz.3 \otimes Grz.3$ ✓

$S4GrzB_2 \otimes S4GrzB_2$ ✓

# Aksjomaty i reguły systemu $S5$ C.I.Lewis, C.H.Langford, 1932

$K \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

$T \quad \Box\varphi \to \varphi$

$4 \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

$5 \quad \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

# Aksjomaty i reguły systemu $S5$ C.I.Lewis, C.H.Langford, 1932

$K \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

agent zna wszystkie logiczne konsekwencje swojej wiedzy

$T \quad \Box\varphi \to \varphi$

$4 \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

$5 \quad \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

# Aksjomaty i reguły systemu $S5$ C.I.Lewis, C.H.Langford, 1932

$K \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

agent zna wszystkie logiczne konsekwencje swojej wiedzy

$T \quad \Box\varphi \to \varphi$

wszystko, co wie agent jest prawdą

$4 \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

$5 \quad \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

## Aksjomaty i reguły systemu $S5$ C.I.Lewis, C.H.Langford, 1932

$K \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

agent zna wszystkie logiczne konsekwencje swojej wiedzy

$T \quad \Box\varphi \to \varphi$

wszystko, co wie agent jest prawdą

$4 \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

jeśli agent coś wie, to wie, że o tym wie (agent jest świadomy swojej wiedzy)

$5 \quad \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

# Aksjomaty i reguły systemu $S5$ C.I.Lewis, C.H.Langford, 1932

$K \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
agent zna wszystkie logiczne konsekwencje swojej wiedzy
$T \quad \Box\varphi \to \varphi$
wszystko, co wie agent jest prawdą
$4 \quad \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
jeśli agent coś wie, to wie, że o tym wie (agent jest świadomy swojej wiedzy)
$5 \quad \neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$
jeśli agent czegoś nie wie, to wie, że o tym nie wie (agent ma świadomość swojej niewiedzy)

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

## $S5$

## $S5$

$$\mathcal{C}^{S5} = \{\langle\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}\rangle; n \in \mathbb{N}\}$$

## $S5$

$$\mathcal{C}^{S5} = \{\langle\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}\rangle; n \in \mathbb{N}\}$$

$\langle\omega, R\rangle$ ,$R$ jest relacją pełną.

# Aksjomaty i reguły systemu $S5$

| | |
|---|---|
| $K$ | $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ |
| $T$ | $\Box\varphi \to \varphi$ |
| $4$ | $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ |
| $5$ | $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$ |

$MP$: $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

$RN$ : $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$

# Aksjomaty i reguły systemu $S5 \otimes S5$

$K^1$ $\Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi)$
$T^1$ $\Box_1\varphi \to \varphi$
$4^1$ $\Box_1\varphi \to \Box_1\Box_1\varphi$
$5^1$ $\neg\Box_1\varphi \to \Box_1\neg\Box_1\varphi$

$MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$

$RN$ : $\frac{\varphi}{\Box\ \varphi}$

$K^2$ $\Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi)$
$T^2$ $\Box_2\varphi \to \varphi$
$4^2$ $\Box_2\varphi \to \Box_2\Box_2\varphi$
$5^2$ $\neg\Box_2\varphi \to \Box_2\neg\Box_2\varphi$

# Aksjomaty i reguły systemu $S5 \otimes S5$

$K^1$ $\Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi)$
$T^1$ $\Box_1\varphi \to \varphi$
$4^1$ $\Box_1\varphi \to \Box_1\Box_1\varphi$
$5^1$ $\neg\Box_1\varphi \to \Box_1\neg\Box_1\varphi$

$MP$: $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

$RN_1$: $\frac{\varphi}{\Box_1\varphi}$

$K^2$ $\Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi)$
$T^2$ $\Box_2\varphi \to \varphi$
$4^2$ $\Box_2\varphi \to \Box_2\Box_2\varphi$
$5^2$ $\neg\Box_2\varphi \to \Box_2\neg\Box_2\varphi$

# Aksjomaty i reguły systemu $S5 \otimes S5$

$K^1$ $\Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi)$
$T^1$ $\Box_1\varphi \to \varphi$
$4^1$ $\Box_1\varphi \to \Box_1\Box_1\varphi$
$5^1$ $\neg\Box_1\varphi \to \Box_1\neg\Box_1\varphi$

$MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$

$RN_1$: $\frac{\varphi}{\Box_1\varphi}$

$K^2$ $\Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi)$
$T^2$ $\Box_2\varphi \to \varphi$
$4^2$ $\Box_2\varphi \to \Box_2\Box_2\varphi$
$5^2$ $\neg\Box_2\varphi \to \Box_2\neg\Box_2\varphi$

$RN_2$: $\frac{\varphi}{\Box_2\varphi}$

## $S5 \otimes S5$

Niech $\mathcal{F}^{S5\otimes S5} = \langle W, R, B\rangle$ będzie strukturą, w której $W = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 1); n \geqslant 2, a_1 \in \mathbb{N}, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.
$R, B \subset W \times W$ działają w sposób następujący:

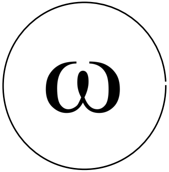
$(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)R(b_1, \dots, b_{m-1}, 1)$ gdy zachodzi jeden z warunków:

- $n = m = 2$
- $2 \mid m = n > 2$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant n - 2$
- $2 \nmid m = n$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant n - 1$
- $2 \nmid k = min\{n, m\}$, $|n - m| = 1$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant k - 1$.

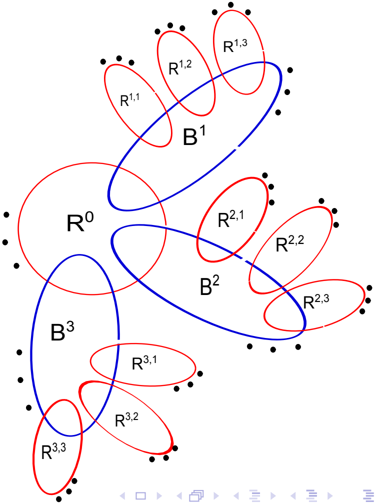
$(a_1, \dots, a_{n-1})B(b_1, \dots, b_{m-1})$ gdy zachodzi jeden z warunków:

- $2 \mid m = n$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant n - 1$
- $2 \nmid m = n$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant n - 2$
- $2 \mid k = min\{n, m\}$, $|n - m| = 1$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \leqslant k - 1$.

$S5$




$S5 \otimes S5$



# Aksjomaty i reguły systemu *Grz*.3

*Grz*.3 jest najmniejszym systemem zawierającym następujące aksjomaty (uzupełniające aksjomatykę KRZ):

$$
\begin{array}{ll}
K & \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \\
D1 & \Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi) \\
Grz & \Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi
\end{array}
$$

i jest domknięty na regułę odrywania ($MP$: $\frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$) oraz regułę generalizacji ($RN$: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$).

# $Grz.3$

## $Grz.3$

$$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$$

## $Grz.3$

$$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$$

$$\langle\mathbb{N}, \geqslant\rangle$$

# Aksjomaty i reguły systemu $Grz.3$

| | |
|---|---|
| $K$ | $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ |
| $D1$ | $\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$ |
| $Grz$ | $\Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi$ |

$MP$: $\dfrac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

$RN$ : $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

# Aksjomaty i reguły systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$

$K^1$ $\quad \Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi)$

$D1^1$ $\quad \Box_1(\Box_1\varphi \to \psi) \vee \Box_1(\Box_1\psi \to \varphi)$

$Grz^1$ $\quad \Box_1(\Box_1(\varphi \to \Box_1\varphi) \to \varphi) \to \varphi$

$MP$: $\dfrac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

$RN$ : $\dfrac{\varphi}{\Box\ \varphi}$

$K^2$ $\quad \Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi)$

$D1^2$ $\quad \Box_2(\Box_2\varphi \to \psi) \vee \Box_2(\Box_2\psi \to \varphi)$

$Grz^2$ $\quad \Box_2(\Box_2(\varphi \to \Box_2\varphi) \to \varphi) \to \varphi$

# Aksjomaty i reguły systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$

$$
\begin{array}{ll}
K^1 & \Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi) \\
D1^1 & \Box_1(\Box_1\varphi \to \psi) \vee \Box_1(\Box_1\psi \to \varphi) \\
Grz^1 & \Box_1(\Box_1(\varphi \to \Box_1\varphi) \to \varphi) \to \varphi
\end{array}
$$

$$MP\colon \frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$$

$$RN_1\colon \frac{\varphi}{\Box_1\varphi}$$

$$
\begin{array}{ll}
K^2 & \Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi) \\
D1^2 & \Box_2(\Box_2\varphi \to \psi) \vee \Box_2(\Box_2\psi \to \varphi) \\
Grz^2 & \Box_2(\Box_2(\varphi \to \Box_2\varphi) \to \varphi) \to \varphi
\end{array}
$$

# Aksjomaty i reguły systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$

$$
\begin{array}{ll}
K^1 & \Box_1(\varphi \to \psi) \to (\Box_1\varphi \to \Box_1\psi) \\
D1^1 & \Box_1(\Box_1\varphi \to \psi) \vee \Box_1(\Box_1\psi \to \varphi) \\
Grz^1 & \Box_1(\Box_1(\varphi \to \Box_1\varphi) \to \varphi) \to \varphi
\end{array}
$$

$MP$: $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$

$RN_1$: $\frac{\varphi}{\Box_1\varphi}$

$$
\begin{array}{ll}
K^2 & \Box_2(\varphi \to \psi) \to (\Box_2\varphi \to \Box_2\psi) \\
D1^2 & \Box_2(\Box_2\varphi \to \psi) \vee \Box_2(\Box_2\psi \to \varphi) \\
Grz^2 & \Box_2(\Box_2(\varphi \to \Box_2\varphi) \to \varphi) \to \varphi
\end{array}
$$

$RN_2$: $\frac{\varphi}{\Box_2\varphi}$

## $Grz.3 \otimes Grz.3$

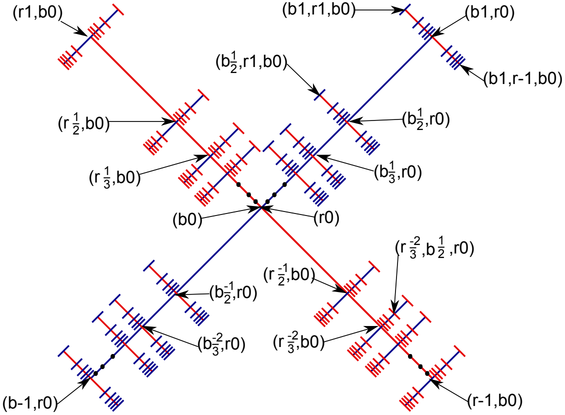
Niech $\mathfrak{F}^{Grz.3 \otimes Grz.3} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ będzie strukturą, w której $W = \{(c_1 p_1, \ldots, c_{n-1} p_{n-1}, c_n 0); n \in \mathbb{N}, c_k \in \{r, b\}, c_k \neq c_{k+1}, p_k \in \{-\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}\}$. $(r0)$ oraz $(b0)$ jest tym samym elementem. $R_1$ oraz $R_2$ są relacjami określonymi na zbiorze $U$ i działają w sposób następujący:

$(c_1^1 p_1, \ldots, c_{n-1}^1 p_{n-1}, c_n^1 0) R_1 (c_1^2 q_1, \ldots, c_{m-1}^2 q_{m-1}, c_m^2 0)$ , gdy spełniony jest jeden z warunków:

- $n = m$, $c_1^1 = c_1^2$, $p_s = q_s$ dla $s \leqslant n-2$, $c_{n-1}^1 = r$, $p_{n-1} \leqslant q_{m-1}$
- $n = m-1$, $c_1^1 = c_1^2$, $p_s = q_s$ dla $s \leqslant n-1$, $c_n^1 = r$, $0 < q_{m-1}$
- $n-1 = m$, $c_1^1 = c_1^2$, $p_s = q_s$ dla $s \leqslant n-2$, $c_m^2 = r$, $p_{n-1} < 0$.

$Grz.3$


$Grz.3 \otimes Grz.3$



## Fuzja systemów jednomodalnych

Niech $L_1$ oraz $L_2$ będą systemami jednomodalnymi opisanymi w językach $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$. Niech $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ będzie sumą języków $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$. Wówczas fuzją systemów $L_1$ oraz $L_2$ jest najmniejszy dwumodalny system opisany w języku $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ zawierający $L_1$ oraz $L_2$. Oznaczamy go $L_1 \otimes L_2$.

## Fuzja systemów jednomodalnych

Niech $L_1$ oraz $L_2$ będą systemami jednomodalnymi opisanymi w językach $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$. Niech $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ będzie sumą języków $\mathcal{L}_1$ oraz $\mathcal{L}_2$. Wówczas fuzją systemów $L_1$ oraz $L_2$ jest najmniejszy dwumodalny system opisany w języku $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ zawierający $L_1$ oraz $L_2$. Oznaczamy go $L_1 \otimes L_2$.

## Fuzja rodzin struktur Kripkego

Rozważmy rodziny struktur Kripkego $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ domknięte na sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Fuzją $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ klas $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ nazwiemy klasę struktur postaci

$$\langle W, R_1, R_2 \rangle,$$

gdzie $\langle W, R_1 \rangle \in \mathcal{C}_1$ oraz $\langle W, R_2 \rangle \in \mathcal{C}_2$.

### Twierdzenie [Kracht,Wolter 1991]

Niech $L_1$ oraz $L_2$ będą systemami jednomodalnymi charakteryzowanymi przez rodziny struktur $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$, odpowiednio. Przypuśćmy, że $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ są domknięte na sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Wówczas dwumodalny system $L_1 \otimes L_2$ jest charakteryzowany przez rodzinę struktur $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$.

**Twierdzenie [Kracht,Wolter 1991]**

Niech $L_1$ oraz $L_2$ będą systemami jednomodalnymi charakteryzowanymi przez rodziny struktur $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$, odpowiednio. Przypuśćmy, że $\mathcal{C}_1$ oraz $\mathcal{C}_2$ są domknięte na sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Wówczas dwumodalny system $L_1 \otimes L_2$ jest charakteryzowany przez rodzinę struktur $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$.

Rozważając rodziny struktur skończonych, wystarczy założyć domknięcie na skończone sumy rozłączne.

## Punkt $\mathcal{C}$-startowy

Niech $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i; i \in I\}$ będzie rodziną struktur spójnych oran niech $\mathfrak{F}$ będzie strukturą spójną. Punkt $x_0$ struktury $\mathfrak{F}$ nazwiemy *punktem $\mathcal{C}$-startowym*, jeśli każde odwzorowanie $f : \{x_0\} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$ można rozszerzyć do $p$-morfizmu $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$, dla każdego $i \in I$.

## Punkt $\mathcal{C}$-startowy

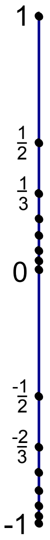
Niech $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i; i \in I\}$ będzie rodziną struktur spójnych oran niech $\mathfrak{F}$ będzie strukturą spójną. Punkt $x_0$ struktury $\mathfrak{F}$ nazwiemy *punktem $\mathcal{C}$-startowym*, jeśli każde odwzorowanie $f : \{x_0\} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$ można rozszerzyć do $p$-morfizmu $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}_i$, dla każdego $i \in I$.

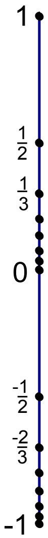
Przykład:
$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, 2, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$

## Punkt $\mathcal{C}$-startowy

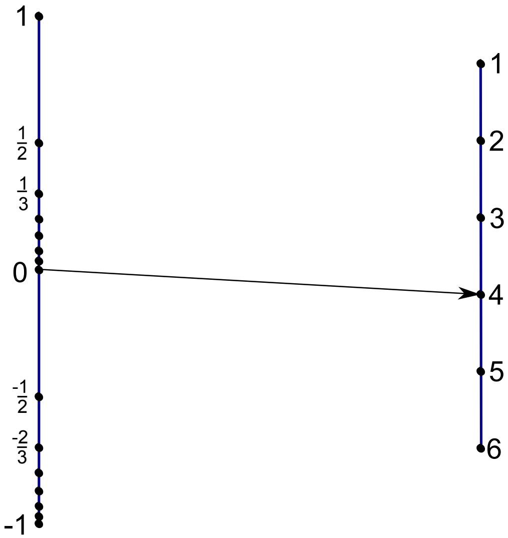
Niech $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i; i \in I\}$ będzie rodziną struktur spójnych oran niech $\mathfrak{F}$ będzie strukturą spójną. Punkt $x_0$ struktury $\mathfrak{F}$ nazwiemy *punktem $\mathcal{C}$-startowym*, jeśli każde odwzorowanie $f : \{x_0\} \to \mathfrak{F}_i$ można rozszerzyć do $p$-morfizmu $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_i$, dla każdego $i \in I$.

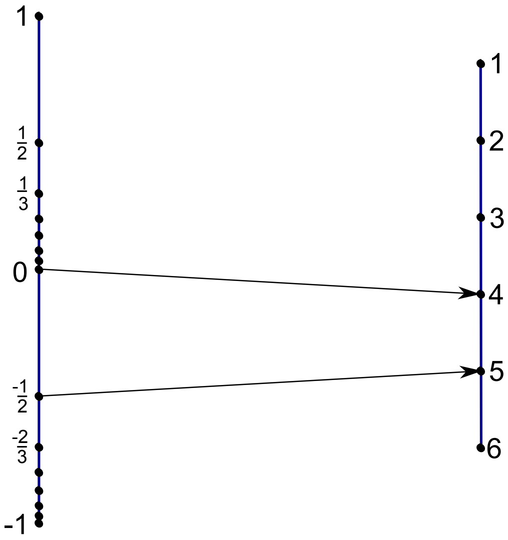
Przykład:
$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, 2, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$
$\mathfrak{F}^{Grz.3} = \langle\{-\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 0\}, \leqslant\rangle$

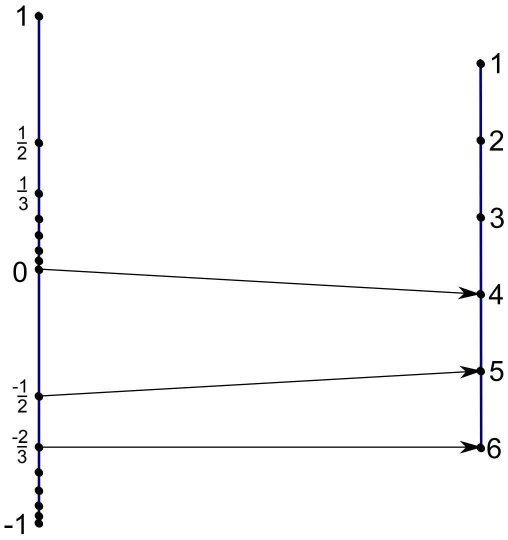

1
1/2
1/3
0
-1/2
-2/3
-1

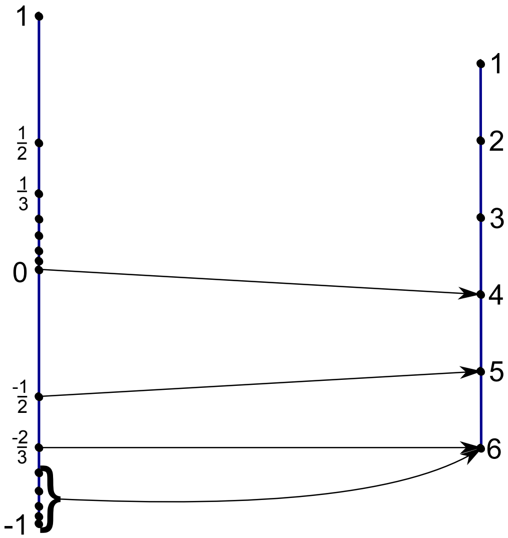

1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
0
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-2}{3}$
-1

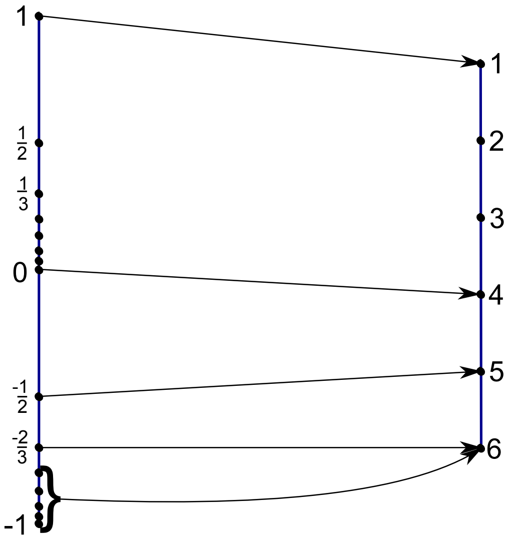

1
2
3
4
5
6

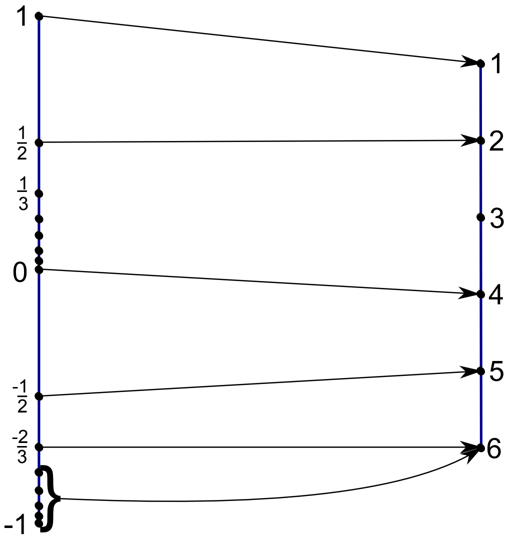

1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
0
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-2}{3}$
-1
1
2
3
4
5
6

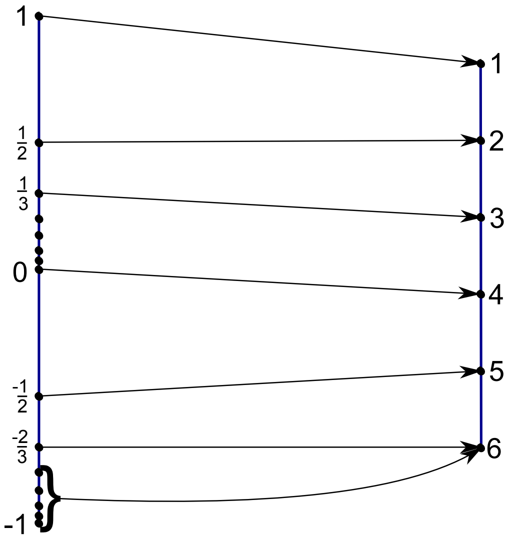

1
1/2
1/3
0
-1/2
-2/3
-1
1
2
3
4
5
6

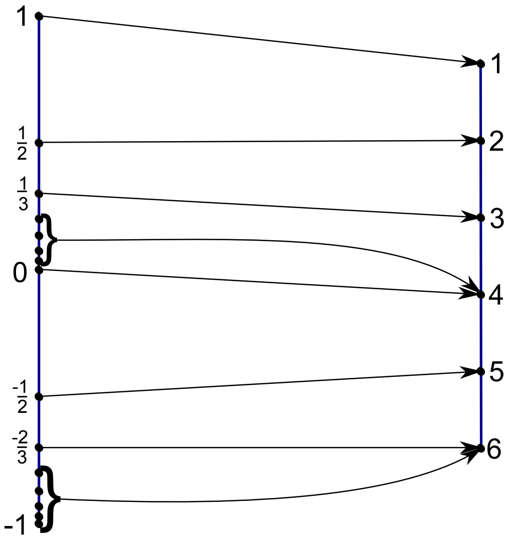

1
1/2
1/3
0
-1/2
-2/3
-1
1
2
3
4
5
6


1
1/2
1/3
0
-1/2
-2/3
-1
1
2
3
4
5
6


1
1/2
1/3
0
-1/2
-2/3
-1
1
2
3
4
5
6


1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
0
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-2}{3}$
-1
1
2
3
4
5
6


1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
0
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-2}{3}$
-1
1
2
3
4
5
6


1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$
0
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-2}{3}$
-1
1
2
3
4
5
6

### Twierdzenie

- $\mathcal{C}_1$ rodzina struktur spójnych charakteryzująca system $L_1$
- $\mathcal{C}_2$ rodzina struktur spójnych charakteryzująca system $L_2$
- $\mathfrak{F}^1$ przeliczalna $L_1$-struktura z punktem $\mathcal{C}_1$-startowym,
- $\mathfrak{F}^2$ przeliczalna $L_2$-struktura z punktem $\mathcal{C}_2$-startowym.

Wówczas istnieje przeliczalna struktura spójna $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ charakteryzująca system $L_1 \otimes L_2$.
Spójne składowe struktury $\langle W, R_1 \rangle$ są izomorficzne z strukturą $\mathfrak{F}^1$, a spójne składowe struktury $\langle W, R_2 \rangle$ są izomorficzne z strukturą $\mathfrak{F}^2$.

$\mathfrak{F}^1 = \langle \{a_1, a_2, \dots\}, S_1 \rangle$ - $L_1$-struktura z punktem $\mathcal{C}_1$-startowym $a_1$
$\mathfrak{F}^2 = \langle \{b_1, b_2, \dots\}, S_2 \rangle$ - $L_2$-struktura z punktem $\mathcal{C}_2$-startowym $b_1$

$\mathfrak{F}^1 = \langle\{a_1, a_2, \dots\}, S_1\rangle$ - $L_1$-struktura z punktem $\mathcal{C}_1$-startowym $a_1$
$\mathfrak{F}^2 = \langle\{b_1, b_2, \dots\}, S_2\rangle$ - $L_2$-struktura z punktem $\mathcal{C}_2$-startowym $b_1$

$\mathfrak{F} = \langle W, R_1, R_2\rangle$

$$W = \{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots c'_{i_{n-1}}, c_1)\colon n \in \{2, \dots\}, c', c \in \{a, b\} \text{ oraz}$$
$$c' \neq c, i_1 \in \mathbb{N}, i_2, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{n-1}}, a_1) R_1 (a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \ldots, b_{i_{n-1}} = b_{j_{n-1}}$ oraz $a_1 S_1 a_1$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}, b_1) R_1 (a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \ldots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}} S_1 a_{j_{n-1}}$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}, b_1) R_1 (a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_{n-2}}, a_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \ldots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}} S_1 a_1$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{n-2}}, a_1) R_1 (a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \ldots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_1 S_1 a_{j_{n-1}}$.

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1) R_2 (a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-1}} = a_{j_{n-1}}$ oraz $b_1 S_2 b_1$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1) R_2 (a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}} S_2 b_{j_{n-1}}$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1) R_2 (a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-2}}, b_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}} S_2 b_1$,
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1) R_2 (a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ iff $a_{i_1} = a_{j_1},\ b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_1 S_2 b_{j_{n-1}}$.

## $Grz.3$

$Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę
$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$

## $Grz.3$

$Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę
$\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$

### Twierdzenie [Kracht, Wolter]

System dwumodalny $Grz.3 \otimes Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę skończonych struktur $\mathcal{C}_0$ postaci $\langle V, H_1, H_2\rangle$, gdzie każda spójna składowa struktury $\langle V, H_1\rangle$ oraz $\langle V, H_2\rangle$ jest łańcuchem skończonym.

$$\models_{\mathcal{C}_0} \varphi \;\Leftrightarrow\; \vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \varphi$$

## $Grz.3$

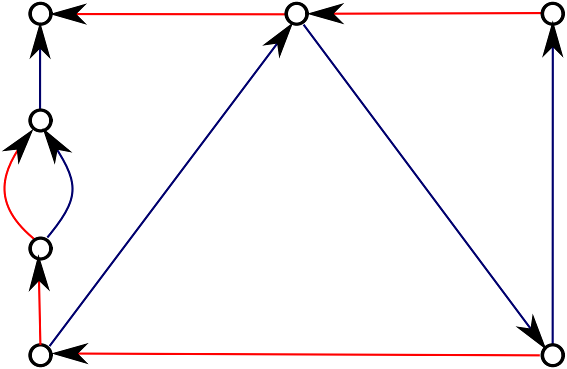
$Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę $\mathcal{C}^{Grz.3} = \{\langle\{1, \ldots, n\}, \geqslant\rangle; n \in \mathbb{N}\}$

**Twierdzenie [Kracht, Wolter]**

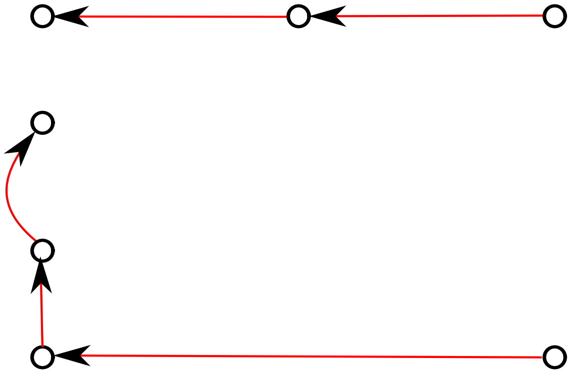
System dwumodalny $Grz.3 \otimes Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę skończonych struktur spójnych $\mathcal{C}_0$ postaci $\langle V, H_1, H_2\rangle$, gdzie każda spójna składowa struktury $\langle V, H_1\rangle$ oraz $\langle V, H_2\rangle$ jest łańcuchem skończonym.

$$\models_{\mathcal{C}_0} \varphi \ \Leftrightarrow\ \vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \varphi$$

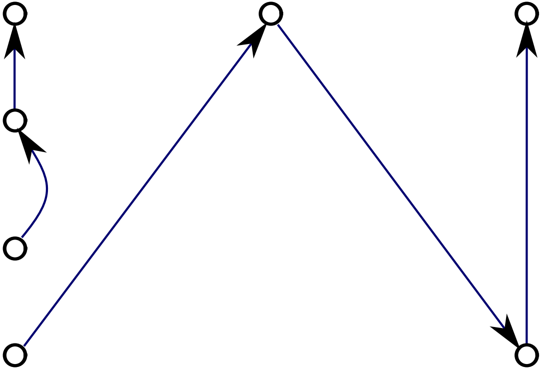
$$\langle V, H_1, H_2 \rangle$$



$$\langle V, H_1 \rangle$$



$$\langle V, H_2 \rangle$$

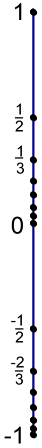


$Grz.3$

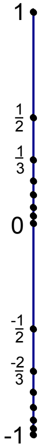

$Grz.3 \otimes Grz.3$

$Grz.3$

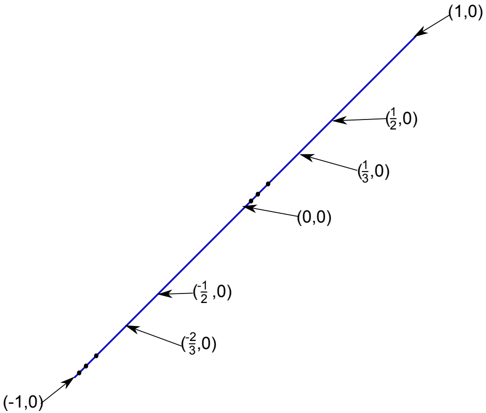
$Grz.3 \otimes Grz.3$



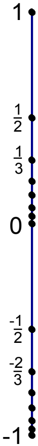
$Grz.3$



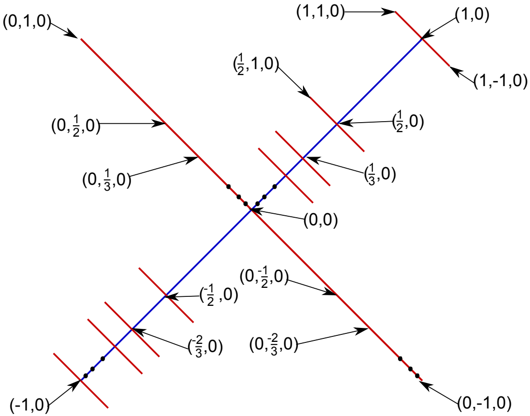

$Grz.3 \otimes Grz.3$



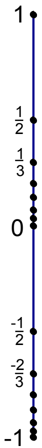
$Grz.3$



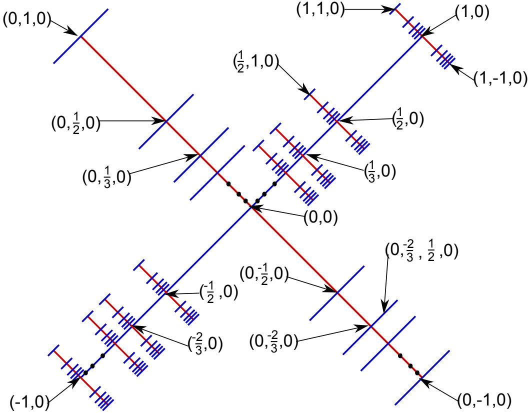

$Grz.3 \otimes Grz.3$



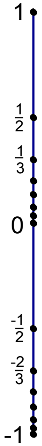
$Grz.3$



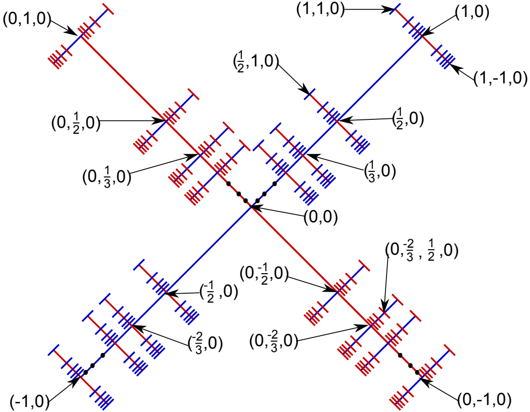

$Grz.3 \otimes Grz.3$



$Grz.3$




$Grz.3 \otimes Grz.3$

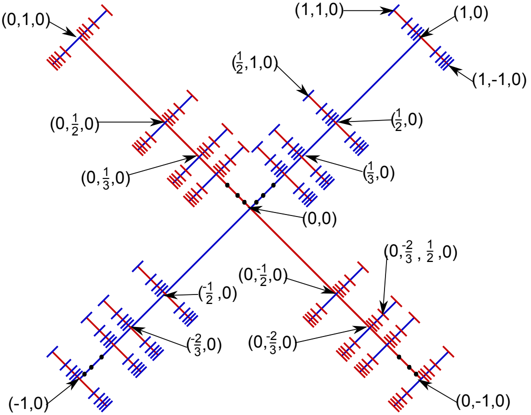


## $Grz.3 \otimes Grz.3$

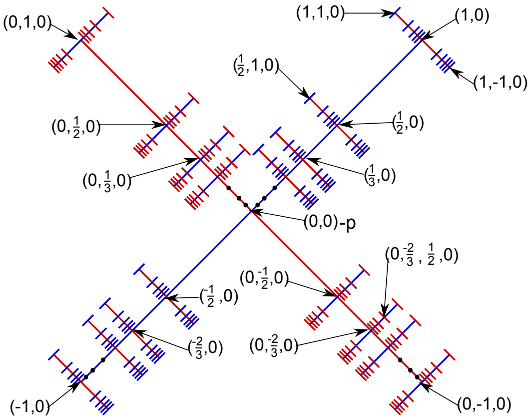
$\mathfrak{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$, gdzie
$W = \{(p_1, \ldots, p_{n-1}, 0); n \geqslant 2, p_1 \in \{-\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 0\}, p_k \in \{-\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}\}$.
$R_2 \subset W \times W$:
$(p_1, \ldots, p_{n-1}, 0) R_2 (q_1, \ldots, q_{m-1}, 0)$ iff

- $n = m$ jest parzyste oraz $p_1 = q_1, \ldots, p_{n-1} = q_{n-1}$ lub
- $n = m$ jest nieparzyste oraz $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-2} = b_{n-2}$ oraz $p_{n-1} \leqslant q_{n-1}$ lub
- $n - 1 = m$ oraz $n$ jest nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leqslant n - 2$, $p_{n-1} < 0$ lub
- $n = m - 1$ oraz $m$ jest nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leqslant m - 2$, $0 < q_{m-1}$.

$$\vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \rightarrow \Box_2 p) \rightarrow p) \rightarrow p \ (?)$$

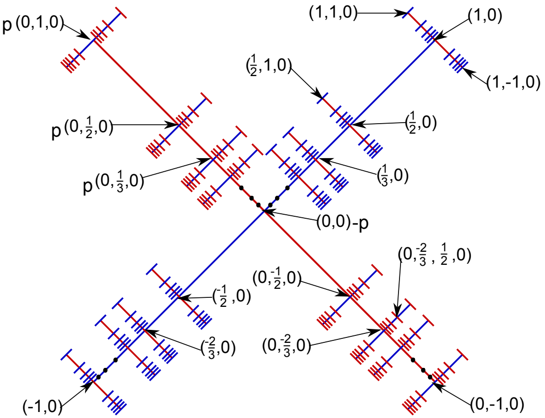


$$\vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \to \Box_2 p) \to p) \to {\color{red} p} \ (?)$$




$\not\Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0,0) \rangle} p$

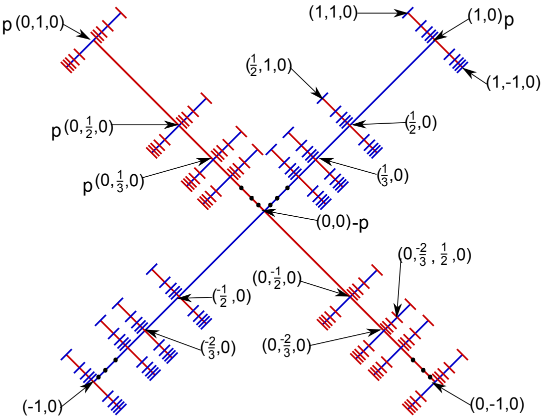
$$\vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \to \Box_2 p) \to p) \to p \ (?)$$




$$\nVdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0,0) \rangle} p$$

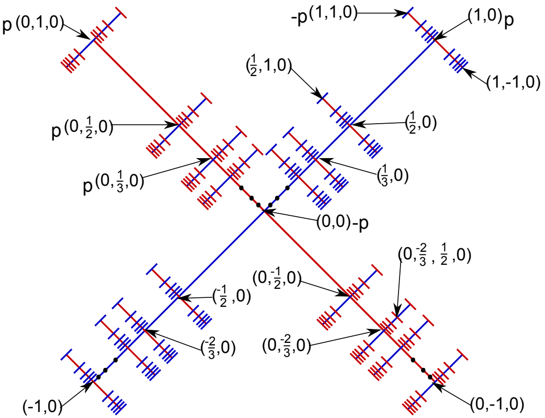
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0, \frac{1}{n}, 0) \rangle} p$$

$$\vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \to \Box_2 p) \to p) \to p \ (?)$$




$$\not\Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0,0) \rangle} p$$
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0, \frac{1}{n}, 0) \rangle} p$$
$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (\frac{1}{n_0}, 0) \rangle} p$$

$$\vdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \rightarrow \Box_2 p) \rightarrow p) \rightarrow p \ (?)$$



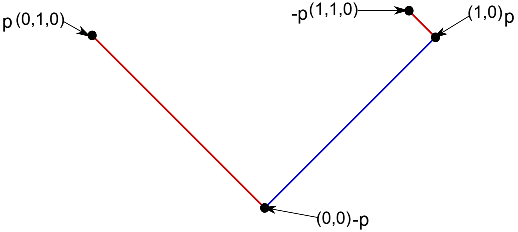

$\not\Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0,0) \rangle} p$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0, \frac{1}{n}, 0) \rangle} p$

$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (\frac{1}{n_0}, 0) \rangle} p$

$\exists_{m_0 \in \mathbb{N}} \not\Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (\frac{1}{n_0}, \frac{1}{m_0}, 0) \rangle} p$

$$\nvdash_{Grz.3 \otimes Grz.3} \Box_2(\Box_1(p \rightarrow \Box_2 p) \rightarrow p) \rightarrow p$$




$\nVdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0,0) \rangle} p$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (0, \frac{1}{n}, 0) \rangle} p$

$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \Vdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (\frac{1}{n_0}, 0) \rangle} p$

$\exists_{m_0 \in \mathbb{N}} \nVdash_{\langle \mathfrak{D}, v, (\frac{1}{n_0}, \frac{1}{m_0}, 0) \rangle} p$

- Artykuł *Countable Frames for Fusions of Modal Logics* zawierający opis metody z punktem $\mathcal{C}$-startowym oraz metody z $\mathcal{C}$-korzeniem dla logik wielomodalnych.
- Różnice pomiędzy strukturą otrzymaną za pomocą metody z punktem $\mathcal{C}$-startowym a strukturą kanoniczną.
- Jaka podstruktura wystarczy do stwierdzenia, czy dana formuła jest tezą rozpatrywanego systemu.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

- P.Blackburn, M.Rijke, Y.Venema: *Modal Logic*, 2001.
- K.Fine, G.Schurz: *Transfer Theorems for Multimodal Logics*,BJ. Copeland (ed.), Logic and Reality, Clarendon Press, Oxford 1996,169-213.
- D.M.Gabbay, A.Kurucz, F.Wolter oraz M.Zakharyaschev: *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, 2003.
- M.Kracht, F.Wolter: *Properties of independently axiomatizable bimodal logic*, Journal of Symbolic Logic, 56, 1469-1485, 1991
- K.Segerberg: *Two-dimensional modal logic*, Journal of Philosophical logic, 2 (1973), 77-96.