Wektorowe średnie niezmiennicze

Radosław Łukasik

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki,
Podlesice, 22 – 26 wrzesień 2014

Wstęp

Średnie niezmiennicze na grupach są ważnym narzędziem w wielu dziedzinach matematyki, szczególnie w analizie harmonicznej ([6], [8]). Podstawowe własności średnich niezmienniczych można znaleźć w [6]. Średnie niezmiennicze i ich uogólnienie na funkcje o wartościach wektorowych odgrywają również ważną rolę w badaniu stabilności równań funkcyjnych i selekcji multifunkcji ([9], [2], [3], [10], [1]).

Definicja 1

Półgrupę $(S, +)$ nazywamy półgrupą ze średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą $\iff$ istnieje liniowe odwzorowanie $L\colon \mathcal{B}(S, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\inf f(S) \leqslant L(f) \leqslant \sup f(S), \ f \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R})$$

$$L({}_af) = L(f), \ a \in S, \ f \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R}),$$

$$[L(f_a) = L(f), \ a \in S, \ f \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R})],$$

gdzie

$${}_af(x) = f(a + x), \ a, x \in S, \ f \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R}),$$

$$[f_a(x) = f(x + a), \ a, x \in S, \ f \in \mathcal{B}(S, \mathbb{R})].$$

Jeżeli S jest półgrupą ze średnią lewostronnie i prawostronnie niezmienniczą, to nazywamy ją półgrupą ze średnią niezmienniczą.

Uwaga 2

Każda półgrupa przemienna jest półgrupą ze średnią niezmienniczą.

Pewne uogólnienia średnich niezmienniczych dla funkcji o wartościach w przestrzeniach wektorowych były badane przez Gajdę [2] i Tabora [11] gdzie znajdziemy następującą definicję.

Definicja 3

Odwzorowanie liniowe $m\colon \mathcal{B}(G,X) \to X$ nazywamy średnią niezmienniczą $\iff$ zachodzą następujące warunki:
(i) dla każdego $f \in \mathcal{B}(G,X)$ i $a \in G$ mamy
$$m({}_af) = m(f_a) = m(f),$$
(ii) dla każdego $f \in \mathcal{B}(G,X)$ oraz domkniętego, wypukłego i ograniczonego zbioru $V \subset X$ mamy
$$im(f) \subset V \Longrightarrow m(f) \in V. \tag{1}$$

Pojawia się naturalne pytanie: czy dla danej grupy $(G,+)$ ze średnią niezmienniczą oraz przestrzeni Banacha X istnieje (wektorowa) średnia niezmiennicza? Z. Gajda pokazał ([2, Theorem 2.3]) że odpowiedź jest pozytywna gdy X jest refleksywna. Następnie J. Tabor ([11, Theorem 1]) udowodnił, że dla pozostałych przestrzeni Banacha średnia niezmiennicza nie istnieje.

Oznaczenia

Przez $(X, ||\cdot||)$ będziemy oznaczać rzeczywistą przestrzeń Banacha. Odwzorowanie $\kappa\colon X \to X^{**}$ będzie dane wzorem

$$\kappa(x)(x^*) = x^*x,\ x \in X,\ x^* \in X^*.$$

Zdefiniujemy uogólnienie średnich niezmienniczych następująco ([3]).

Definicja 4

Niech $(S, +)$ będzie półgrupą ze średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą. Odwzorowanie liniowe $M\colon \mathcal{B}(S, X) \to X$ nazywamy średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą $\iff$

$$\begin{aligned}
&||M|| \leqslant 1,\\
&M(c1_S) = c,\ c \in X,\\
&M({}_af) = M(f),\ a \in S, f \in \mathcal{B}(S, X),\\
&[M(f_a) = M(f),\ a \in S, f \in \mathcal{B}(S, X)].
\end{aligned}$$

Jeżeli M jest średnią lewostronnie i prawostronnie niezmienniczą, to M nazywamy średnią niezmienniczą.

Łatwo zauważyć, że $M\colon \mathcal{B}(S,X) \to X$ spełniające warunki definicji 3, spełnia również warunki definicji 4.

Definicja 5

Przestrzeń Banacha X ma własność średniej niezmienniczej $\iff$ dla każdej półgrupy $(S,+)$ ze średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą istnieje średnia lewostronnie [prawostronnie] niezmiennicza $M\colon \mathcal{B}(S,X) \to X$.

Twierdzenie 6

Niech $\varphi\colon X^{**} \to X$ *będzie liniową i ciągłą funkcją taką, że*

$$||\varphi|| \leqslant 1 \ i \ \varphi \circ \kappa = id_X.$$

Wówczas przestrzeń X *ma własność średniej niezmienniczej.*

Uwaga 7

Liniowe i ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon X^{**} \to X$ takie, że

$$||\varphi|| \leqslant 1 \text{ i } \varphi \circ \kappa = id_X,$$

istnieje $\iff X$ jest "constrained" w swoim bidualu.
Własność tę badał Godefroy [4] i Rao [7].

Wniosek 8

Jeżeli X *jest refleksywna lub ma własność rozszerzania Hahna-Banacha, to* X *ma własność średniej niezmienniczej.*

Wniosek 9

Jeżeli X *jest przestrzenią unormowaną, to przestrzeń dualna* X^* *ma własność średniej niezmienniczej.*

Twierdzenie 10

Niech $(G,+)$ będzie grupą. Załóżmy, że istnieje średnia lewostronnie [prawostronnie] niezmiennicza $M\colon \mathcal{B}(G,X)\to X$. Wówczas, dla każdej podgrupy G_0 grupy G, istnieje średnia lewostronnie [prawostronnie] niezmiennicza $M_0\colon \mathcal{B}(G_0,X)\to X$.

Uwaga 11

Ponieważ każda przestrzeń unormowana jest izometrycznie izomorficzna z pewną podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{B}(\Omega,\mathbb{R})$ z normą supremum, to możemy ograniczyć się do badania tylko podprzestrzeni $\mathcal{B}(\Omega,\mathbb{R})$.

Twierdzenie 12

Niech Ω będzie zbiorem nieskończonym, X będzie podprzestrzenią $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ taką, że

$$1_{\{\omega\}} \in X,\ \omega \in \Omega,$$
$$||f|| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|,\ f \in X.$$

Jeżeli $X \neq \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$, to istnieje liczba kardynalna $\gamma \leqslant card\,\Omega$ taka, że dla każdej grupy $(G, +)$, $card\, G = \gamma$, nie istnieje średnia lewostronnie (ani prawostronnie) niezmiennicza $M \colon \mathcal{B}(G, X) \to X$.
W szczególności, jeżeli X ma własność średniej niezmienniczej, to $X = \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$.

Wniosek 13

Przestrzenie c i c_0 nie mają własności średniej niezmienniczej.

Przykład 14

Przestrzeń $C(\mathbb{R})$ nie ma własności średniej niezmienniczej.

Twierdzenie 15

Niech Ω *będzie zbiorem nieprzeliczalnym,* γ *będzie liczbą kardynalną taką, że* $\aleph_0 \leqslant \gamma < card\,\Omega$. *Niech dalej*
$X_\gamma := \{f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R}) : \ card\,\{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \neq 0\} < \gamma\}$. *Wówczas*
(i) Dla każdej półgrupy $(S, +)$ *ze średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą,* $card\,S < \gamma$, *istnieje średnia lewostronnie [prawostronnie] niezmiennicza* $M\colon \mathcal{B}(S, X_\gamma) \to X_\gamma$.
(ii) Dla każdej grupy $(G, +)$ *takiej, że* $card\,G \geqslant \gamma$, *nie istnieje średnia lewostronnie (ani prawostronnie) niezmiennicza* $M\colon \mathcal{B}(G, X_\gamma) \to X_\gamma$.

Twierdzenie 15 nasuwa naturalne pytanie:

Problem otwarty 1

Czy dla każdej przestrzeni Banacha X bez własności średniej niezmienniczej istnieje liczba kardynalna γ taka, że:
(i) Dla każdej półgrupy $(S, +)$ ze średnią lewostronnie [prawostronnie] niezmienniczą, $\mathrm{card}\, S < \gamma$, istnieje średnia lewostronnie [prawostronnie] niezmiennicza $M\colon \mathcal{B}(S, X) \to X$.
(ii) Dla każdej grupy $(G, +)$ takiej, że $\mathrm{card}\, G \geqslant \gamma$, nie istnieje średnia lewostronnie (ani prawostronnie) niezmiennicza $M\colon \mathcal{B}(G, X) \to X$?

Również Twierdzenie 6 nasuwa pytanie:

Problem otwarty 2

Niech X będzie przestrzenią Banacha z własnością średniej niezmienniczej. Czy istnieje liniowe i ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon X^{**} \to X$ takie, że

$$||\varphi|| \leqslant 1 \text{ i } \varphi \circ \kappa = id_X?$$

W pracy Godefroy'a i Kaltona [5] można spotkać pewien warunek, który implikuje istnienie projekcji o normie jeden z X^{**} w X:

Dla każdej rodziny kul domkniętych $\{B(x_t, r_t) : \ t \in T\}$

$$\left[\underset{J \subset T, \ \mathrm{card}\, J < \infty}{\forall} \bigcap_{t \in J} B(x_t, r_t) \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{t \in T} B(x_t, r_t) \neq \emptyset \right]. \qquad (IP_{f,\infty})$$

Nie wiadomo czy jest on równoważny istnieniu tej projekcji.
Można "rozbić" ten warunek następująco: Niech γ będzie liczbą kardynalną.

Dla każdej rodziny kul domkniętych $\{B(x_t, r_t) : \ t \in T\}, \mathrm{card}\, T = \gamma$

$$\left[\underset{J \subset T, \ \mathrm{card}\, J < \infty}{\forall} \bigcap_{t \in J} B(x_t, r_t) \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{t \in T} B(x_t, r_t) \neq \emptyset \right]. \qquad (IP_{f,\gamma})$$

Powyższy warunek ma własności:

$$\underset{\gamma}{\forall} \ IP_{f,\gamma} \Longleftrightarrow IP_{f,\infty};$$

$$IP_{f,\gamma} \Longrightarrow \underset{\beta < \gamma}{\forall} \ IP_{f,\beta}.$$

Bibliografia I

[1] R. Badora, R. Ger, Zs. Páles, Additive selections and the stability of the Cauchy functional equation, *ANZIAM J.*, **44** (2003), 323–337.

[2] Z. Gajda, Invariant means and representations of semigroups in the theory of functional equations, *Prace Naukowe Uniwersytetu Slaskiego*, Katowice (1992).

[3] R. Ger, The singular case in the stability behavior of linear mappings, *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 59–70.

[4] G. Godefroy, Five lectures in Geometry of Banach spaces, *Seminar on Functional Analysis* (1987), 9–67.

[5] G. Godefroy, N. J. Kalton, The ball topology and its application, *Contemporary Mathematics*, **85** (1989), 195–237.

[6] F.P. Greenleaf, Invariant means on topological groups and their applications, *Van Nostrand Mathematical Studies*, **16**, New York–Toronto–London–Melbourne, 1969.

Bibliografia II

[7] T. S. S. R. K. Rao, $L^1(\mu, X)$ as a constrained subspace of its bidual, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **109** no. 3 (1999), 309–315.

[8] E. Hewitt, K. Ross, Abstract Harmonic Analysis (Vol. 1), *Academic Press*, New York, 1962.

[9] L. Székelyhidi, A note on Hyers theorem, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **8** (1986), 127–129.

[10] J. Tabor, Monomial selections of set-valued functions, *Publicationes Math. Debrecen*, **56**, no. 1-2 (2000), 33–42.

[11] J. Tabor, Note on reflexivity and invariant means, *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*, **1285(43)** (2005), 99–102.