

# Diagramy Voronoi

Małgorzata Serwecińska

Instytut Matematyki  
Uniwersytet Śląski

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki  
Podlesice 2014

- 1 Wprowadzenie
- 2 Diagramy Voronoi
  - Definicje i przykłady
  - Własności diagramów Voronoi
  - Algorytmy
- 3 Graf Delaunaya
  - Definicja i przykłady
  - Własności grafów Delaunaya
- 4 Uogólnienia diagramów Voronoi

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.
- Zainteresowanie problemem diagramów Voronoi z punktu widzenia matematyki zaczęło się od prac Gauss’a (1840 r.) dotyczących form kwadratowych.

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.
- Zainteresowanie problemem diagramów Voronoi z punktu widzenia matematyki zaczęło się od prac Gauss’a (1840 r.) dotyczących form kwadratowych.
- Teorię dalej rozwijał Dirichlet (1850 r.). Stąd powstała nazwa **układy mozaikowe Dirichleta**, która też czasami jest używana.

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.
- Zainteresowanie problemem diagramów Voronoi z punktu widzenia matematyki zaczęło się od prac Gauss’a (1840 r.) dotyczących form kwadratowych.
- Teorię dalej rozwijał Dirichlet (1850 r.). Stąd powstała nazwa **układy mozaikowe Dirichleta**, która też czasami jest używana.
- Teoria rozwinięta przez Dirichleta została usystematyzowana przez matematyka Voronoi w 1908 r.

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.
- Zainteresowanie problemem diagramów Voronoi z punktu widzenia matematyki zaczęło się od prac Gauss’a (1840 r.) dotyczących form kwadratowych.
- Teorię dalej rozwijał Dirichlet (1850 r.). Stąd powstała nazwa **układy mozaikowe Dirichleta**, która też czasami jest używana.
- Teoria rozwinięta przez Dirichleta została usystematyzowana przez matematyka Voronoi w 1908 r.
- Teoria diagramów Voronoi pojawiła się także w innych naukach np. biologii, geografii.

# Historia

- Diagramy Voronoi można już znaleźć w sposobie podejścia Kartezjusza do rozbicia wszechświata w części III jego książki „Podstawy filozofii” opublikowanej w 1644 r.
- Zainteresowanie problemem diagramów Voronoi z punktu widzenia matematyki zaczęło się od prac Gauss’a (1840 r.) dotyczących form kwadratowych.
- Teorię dalej rozwijał Dirichlet (1850 r.). Stąd powstała nazwa **układy mozaikowe Dirichleta**, która też czasami jest używana.
- Teoria rozwinięta przez Dirichleta została usystematyzowana przez matematyka Voronoi w 1908 r.
- Teoria diagramów Voronoi pojawiła się także w innych naukach np. biologii, geografii.
- Obecnie teoria diagramów Voronoi ma istotne znaczenie w geometrii obliczeniowej.



## Geometria obliczeniowa

Geometria obliczeniowa to systematyczne badanie algorytmów i struktur danych dla obiektów geometrycznych, skupiające się na

- dokładnych,
- asymptotycznie szybkich

algorytmach.

## Geometria obliczeniowa

Geometria obliczeniowa to systematyczne badanie algorytmów i struktur danych dla obiektów geometrycznych, skupiające się na

- dokładnych,
- asymptotycznie szybkich

algorytmach.

Zastosowania:

- w grafice komputerowej,
- w systemach informacji geograficznej (GIS),
- robotyce,
- i wiele innych.

# Przedstawienie problemu

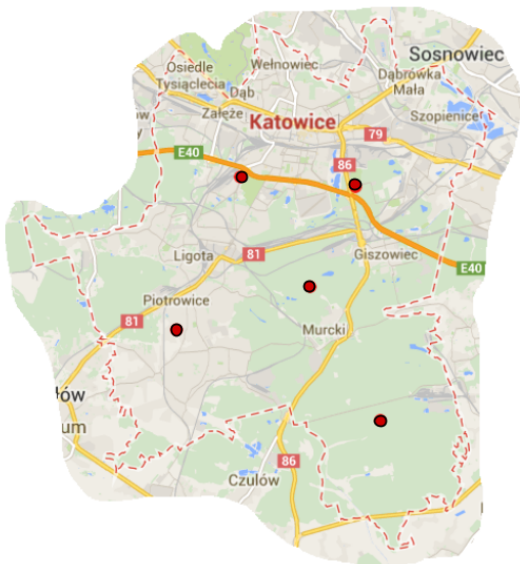
## Problem:

- mamy ustalony zbiór głównych miejsc - zwanych centrami, w których oferowane są towary lub usługi,
- dla każdego centrum należy wyznaczyć obszar, na którym mieszkają ludzie, którzy nabywają w tym centrum towary lub realizują usługi.

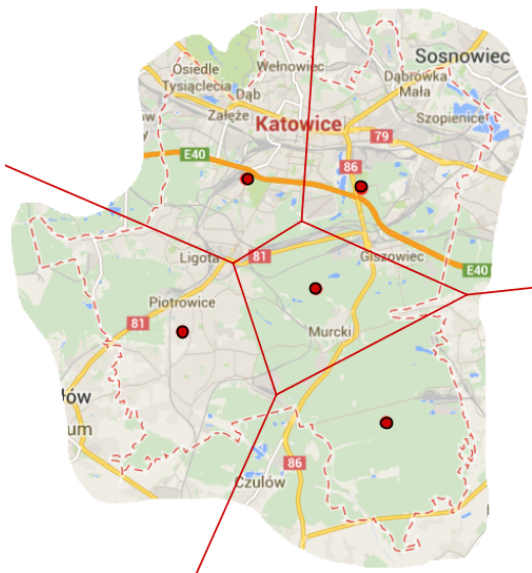
## Założenia:

- cena poszczególnych towarów i usług jest taka sama w każdym centrum,
- koszt nabycia towaru lub wykonania usługi = cena + koszt transportu do danego centrum,
- koszt transportu do danego centrum = odległość do centrum mierzona metryką euklidesową \* ustalona cena za jednostkę odległości,
- konsumenci nabywając towary i realizując usługi próbują minimalizować koszty.

# Problem pocztowy



# Problem pocztowy



# Podstawowe definicje

Niech  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , gdzie  $p_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Punkty ze zbioru  $P$  będziemy nazywać **centrami**.

# Podstawowe definicje

Niech  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , gdzie  $p_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Punkty ze zbioru  $P$  będziemy nazywać **centrami**.

## Definicja komórki diagramu Voronoi

Komórką diagramu Voronoi dla punktu  $p_i$  nazywamy

$$V_P(p_i) = \{x : \forall_{j \neq i} d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\},$$

gdzie  $d$  jest metryką euklidesową.

# Podstawowe definicje

Niech  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , gdzie  $p_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Punkty ze zbioru  $P$  będziemy nazywać **centrami**.

## Definicja komórki diagramu Voronoi

Komórką diagramu Voronoi dla punktu  $p_i$  nazywamy

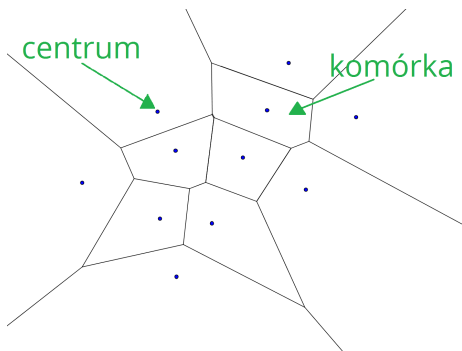
$$V_P(p_i) = \{x : \forall_{j \neq i} d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\},$$

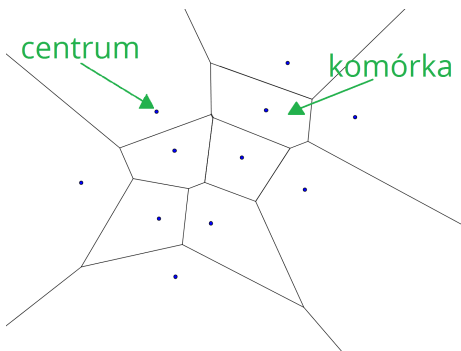
gdzie  $d$  jest metryką euklidesową.

## Definicja diagramu Voronoi

Diagramem Voronoi dla  $P$  nazywamy podział płaszczyzny na  $n$  komórek Voronoi  $V_P(p_1), V_P(p_2), \dots, V_P(p_n)$ . Diagram Voronoi dla  $P$  oznaczamy przez  $Vor(P)$ .

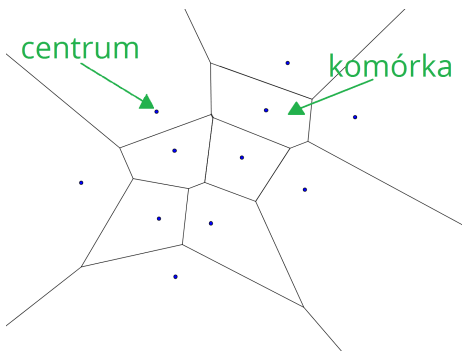






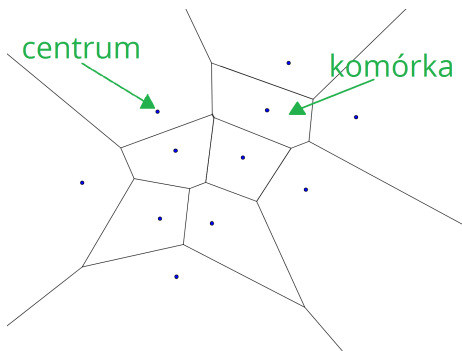
Zauważmy, że

- punkty, które leżą na krawędziach diagramu Voronoi należą do kilku komórek.



Zauważmy, że

- punkty, które leżą na krawędziach diagramu Voronoi należą do kilku komórek.
- $V_P(p_i) \neq \emptyset$  dla  $i = 1, \dots, n$ ,

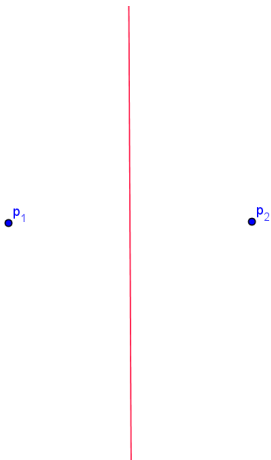


Zauważmy, że

- punkty, które leżą na krawędziach diagramu Voronoi należą do kilku komórek.
- $V_P(p_i) \neq \emptyset$  dla  $i = 1, \dots, n$ ,
- Niektóre komórki diagramu Voronoi są nieograniczone.

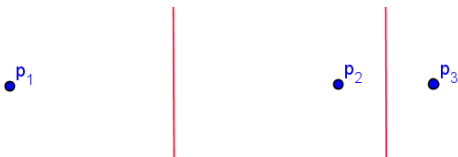
## Przykład - Diagram Voronoi dla dwóch punktów

Niech  $P = \{p_1, p_2\}$  będzie zbiorem dwóch punktów płaszczyzny. Na rysunku przedstawiony został diagram Voronoi dla zbioru  $P$ .

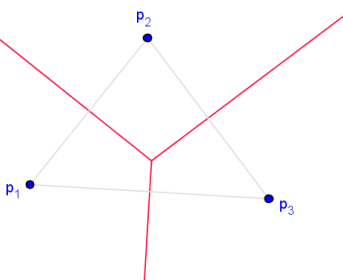


## Przykład - Diagram Voronoi dla 3 punktów

I przypadek – punkty zbioru  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  są współliniowe.

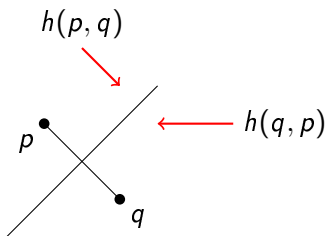


II przypadek – punkty zbioru  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  są niewspółliniowe.



# Wypukłość komórek

Niech  $h(p, q)$  oznacza domkniętą półpłaszczyznę wyznaczoną przez symetralną odcinka  $\overline{pq}$  i zawierającą punkt  $p$ , czyli

$$h(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, x) \leq d(q, x)\}.$$


## Wniosek

$$V_P(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j).$$



## Wniosek

$$V_P(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j).$$

## Wniosek

$V_P(p_i)$  jest wypukłym, wielokątnym obszarem (niekoniecznie ograniczonym) o co najwyżej  $n - 1$  bokach i co najwyżej  $n - 1$  wierzchołkach.

# Algorytm - przecięcie półpłaszczyzn

- Dany jest skończony zbiór punktów płaszczyzny  
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .

# Algorytm - przecięcie półpłaszczyzn

- Dany jest skończony zbiór punktów płaszczyzny  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- Dla każdego punktu  $p_i \in P$  obliczamy osobno  $V_P(p_i)$  jako przecięcie  $n - 1$  półpłaszczyzn.

# Algorytm - przecięcie półpłaszczyzn

- Dany jest skończony zbiór punktów płaszczyzny  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- Dla każdego punktu  $p_i \in P$  obliczamy osobno  $V_P(p_i)$  jako przecięcie  $n - 1$  półpłaszczyzn.
- Część wspólna  $n$  półpłaszczyzn może być wyznaczona za pomocą algorytmu dziel i zwyciężaj w czasie  $O(n \log n)$ .

# Algorytm - przecięcie półpłaszczyzn

- Dany jest skończony zbiór punktów płaszczyzny  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .
- Dla każdego punktu  $p_i \in P$  obliczamy osobno  $V_P(p_i)$  jako przecięcie  $n - 1$  półpłaszczyzn.
- Część wspólna  $n$  półpłaszczyzn może być wyznaczona za pomocą algorytmu dziel i zwyciężaj w czasie  $O(n \log n)$ .
- Obliczając dla każdego punktu osobno komórkę Voronoi otrzymamy algorytm, który działa w czasie  $O(n^2 \log n)$ .

# Struktura diagramu Voronoi

## Twierdzenie

*Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów płaszczyzny. Jeśli wszystkie punkty ze zbioru  $P$  są współliniowe, to  $\text{Vor}(P)$  składa się z  $n - 1$  prostych równoległych i  $n$  komórek. W przeciwnym przypadku  $\text{Vor}(P)$  jest spójny i jego krawędzie są albo odcinkami albo półprostymi.*

# Złożoność diagramu Voronoi

## Twierdzenie

*Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą naturalną. Liczba wierzchołków diagramu Voronoi dla zbioru  $n$  punktów na płaszczyźnie jest  $\leq 2n - 5$ , zaś liczba krawędzi jest  $\leq 3n - 6$ .*

# Charakteryzacja wierzchołków i krawędzi

- Krawędzie diagramu Voronoi są częściami symetralnych danych punktów zbioru, zaś wierzchołki diagramu Voronoi są punktami przecięć tych symetralnych.



# Charakteryzacja wierzchołków i krawędzi

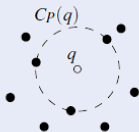
- Krawędzie diagramu Voronoi są częściami symetralnych danych punktów zbioru, zaś wierzchołki diagramu Voronoi są punktami przecięć tych symetralnych.
- Punktów jest  $n$ . Dla każdego z punktów można utworzyć  $n - 1$  symetralnych. Ale każda symetralna będzie liczona podwójnie, więc liczba symetralnych jest równa  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

# Charakteryzacja wierzchołków i krawędzi

- Krawędzie diagramu Voronoi są częściami symetralnych danych punktów zbioru, zaś wierzchołki diagramu Voronoi są punktami przecięć tych symetralnych.
- Punktów jest  $n$ . Dla każdego z punktów można utworzyć  $n - 1$  symetralnych. Ale każda symetralna będzie liczona podwójnie, więc liczba symetralnych jest równa  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- Z poprzedniego twierdzenia wynika, że złożoność diagramu Voronoi jest liniowa. A zatem nie każda z symetralnych definiuje krawędzie diagramu Voronoi i nie wszystkie punkty wspólne symetralnych są wierzchołkami diagramu Voronoi.

## Definicja

Niech  $q \in \mathbb{R}^2$ . Największym pustym kołem dla  $q$  względem  $P$ , oznaczmy przez  $C_P(q)$ , nazywamy koło o największym promieniu i o środku w punkcie  $q$ , które nie zawiera w swoim wnętrzu żadnego punktu z  $P$ .



## Twierdzenie

Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi skończonego zbioru punktów płaszczyzny  $P$ . Wówczas

- i) punkt  $v$  jest wierzchołkiem  $Vor(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy do brzegu  $C_P(v)$  należy 3 lub więcej punktów ze zbioru  $P$ ;
- ii) symetralna dwóch punktów  $p_i, p_j$  zawiera krawędź  $Vor(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt  $v \in s(p_i, p_j)$  taki, że punkty  $p_i, p_j$  są **jedynymi** punktami ze zbioru  $P$  należącymi do brzegu  $C_P(v)$ .

# Algotytm obliczające diagram Voronoi

- Problem sortowania  $n$  liczb rzeczywistych jest redukowalny do problemu obliczania diagramu Voronoi dla  $n$  punktów, więc każdy algorytm obliczający diagramy Voronoi w pesymistycznym przypadku musi wymagać  $\Omega(n \log n)$  czasu.

# Algorytmy obliczające diagram Voronoi

- Problem sortowania  $n$  liczb rzeczywistych jest redukowalny do problemu obliczania diagramu Voronoi dla  $n$  punktów, więc każdy algorytm obliczający diagramy Voronoi w pesymistycznym przypadku musi wymagać  $\Omega(n \log n)$  czasu.
- Diagram Voronoi można obliczyć za pomocą algorytmu typu dziel i zwyciężaj działającego w czasie  $O(n \log n)$ , który został skonstruowany przez Shamos'a i Hoey'a w 1975 r. Jednak jest on trudny do zaimplementowania.

# Algorytmy obliczające diagram Voronoi

- Problem sortowania  $n$  liczb rzeczywistych jest redukowalny do problemu obliczania diagramu Voronoi dla  $n$  punktów, więc każdy algorytm obliczający diagramy Voronoi w pesymistycznym przypadku musi wymagać  $\Omega(n \log n)$  czasu.
- Diagram Voronoi można obliczyć za pomocą algorytmu typu dziel i zwyciężaj działającego w czasie  $O(n \log n)$ , który został skonstruowany przez Shamos'a i Hoey'a w 1975 r. Jednak jest on trudny do zaimplementowania.
- W roku 1987 Fortune podał algorytm wykorzystujący technikę zmiatania działający w czasie  $O(n \log n)$ .

# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.



# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.
- Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi zbioru  $P$ .

# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.
- Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi zbioru  $P$ .
- Budujemy graf dualny  $\mathcal{G}$  do diagramu  $Vor(P)$  w następujący sposób:

# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.
- Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi zbioru  $P$ .
- Budujemy graf dualny  $\mathcal{G}$  do diagramu  $Vor(P)$  w następujący sposób:
  - wierzchołki grafu  $\mathcal{G}$  będą odpowiadać komórkom diagramu Voronoi, czyli będzie ich tyle ile jest komórek diagramu Voronoi,

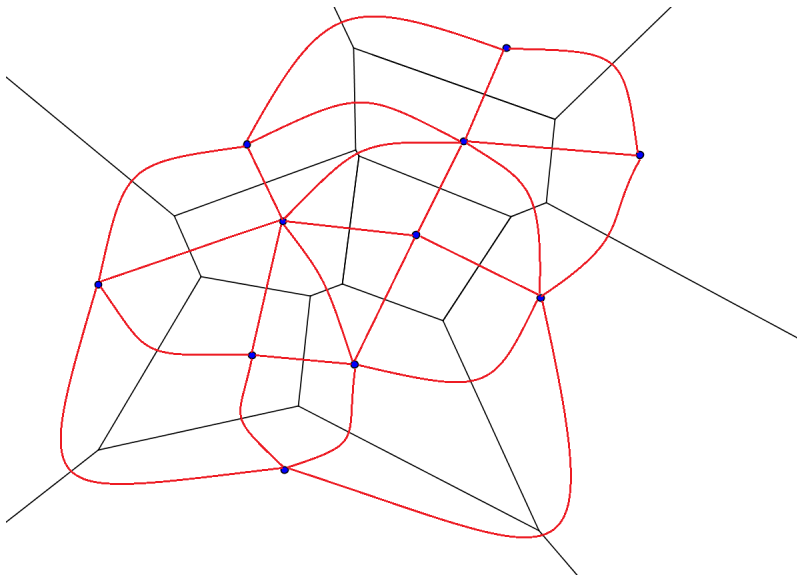
# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.
- Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi zbioru  $P$ .
- Budujemy graf dualny  $\mathcal{G}$  do diagramu  $Vor(P)$  w następujący sposób:
  - wierzchołki grafu  $\mathcal{G}$  będą odpowiadać komórkom diagramu Voronoi, czyli będzie ich tyle ile jest komórek diagramu Voronoi,
  - dwa wierzchołki grafu  $\mathcal{G}$  są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy komórki diagramu Voronoi odpowiadające tym komórkom mają wspólną krawędź.

# Definicja grafu Delaunaya

- Niech  $P$  będzie zbiorem  $n$  punktów na płaszczyźnie.
- Niech  $Vor(P)$  będzie diagramem Voronoi zbioru  $P$ .
- Budujemy graf dualny  $\mathcal{G}$  do diagramu  $Vor(P)$  w następujący sposób:
  - wierzchołki grafu  $\mathcal{G}$  będą odpowiadać komórkom diagramu Voronoi, czyli będzie ich tyle ile jest komórek diagramu Voronoi,
  - dwa wierzchołki grafu  $\mathcal{G}$  są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy komórki diagramu Voronoi odpowiadające tym komórkom mają wspólną krawędź.
- Uwaga! Każda krawędź grafu  $\mathcal{G}$  odpowiada dokładnie jednej krawędzi diagramu Voronoi.

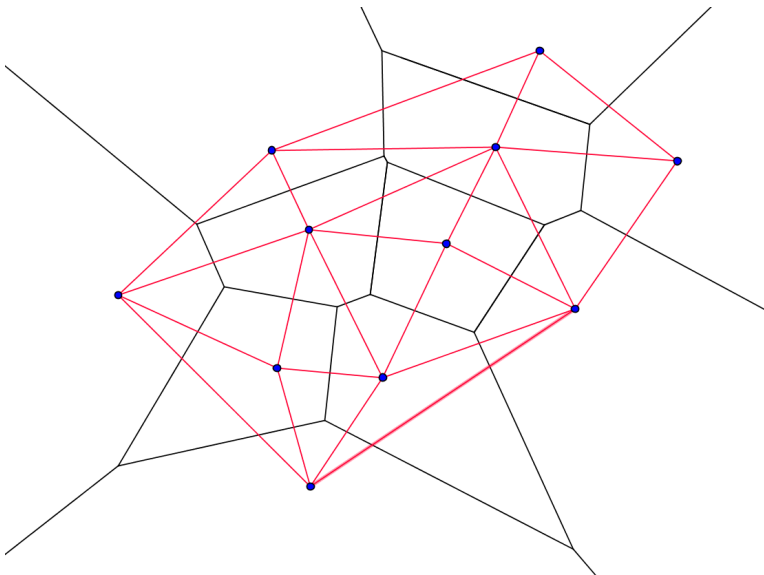
## Przykład



- Rozważmy teraz prostoliniowe zanurzenie grafu  $\mathcal{G}$ : wierzchołek odpowiadający komórce diagramu Voronoi  $V_P(p)$  jest punktem  $p$  a krawędź łącząca wierzchołki odpowiadające komórkom  $V_P(p), V_P(q)$  jest odcinkiem  $\overline{pq}$ .

- Rozważmy teraz prostoliniowe zanurzenie grafu  $\mathcal{G}$ : wierzchołek odpowiadający komórce diagramu Voronoi  $V_P(p)$  jest punktem  $p$  a krawędź łącząca wierzchołki odpowiadające komórkom  $V_P(p), V_P(q)$  jest odcinkiem  $\overline{pq}$ .
- Zanurzenie to nazywamy **grafem Delaunaya** i będziemy oznaczać przez  $\mathcal{DG}(P)$ .





## Twierdzenie

*Graf Delaunaya jest grafem planarnym.*

## Twierdzenie

*Graf Delaunaya jest grafem planarnym.*

- Przypomnijmy własność diagramu Voronoi:  
*punkt  $v$  jest wierzchołkiem  $Vor(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy do brzegu  $C_P(v)$  należy 3 lub więcej punktów ze zbioru  $P$ .*

## Twierdzenie

*Graf Delaunaya jest grafem planarnym.*

- Przypomnijmy własność diagramu Voronoi:  
*punkt  $v$  jest wierzchołkiem  $Vor(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy do brzegu  $C_P(v)$  należy 3 lub więcej punktów ze zbioru  $P$ .*
- Stąd jeśli  $v$  jest wierzchołkiem komórek Voronoi dla centrów  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , to odpowiednia ściana  $f$  w  $\mathcal{DG}(P)$  ma  $p_1, p_2, \dots, p_k$  wierzchołki. Ponadto punkty  $p_1, p_2, \dots, p_k$  należą do brzegu  $C_P(v)$ , więc  $f$  jest  $k$ -kątem wypukłym.

## Twierdzenie

*Graf Delaunaya jest grafem planarnym.*

- Przypomnijmy własność diagramu Voronoi:  
*punkt  $v$  jest wierzchołkiem  $Vor(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy do brzegu  $C_P(v)$  należy 3 lub więcej punktów ze zbioru  $P$ .*
- Stąd jeśli  $v$  jest wierzchołkiem komórek Voronoi dla centrów  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , to odpowiednia ściana  $f$  w  $DG(P)$  ma  $p_1, p_2, \dots, p_k$  wierzchołki. Ponadto punkty  $p_1, p_2, \dots, p_k$  należą do brzegu  $C_P(v)$ , więc  $f$  jest  $k$ -kątem wypukłym.
- Jeśli żadne cztery punkty zbioru  $P$  nie są współokręgowe, to wszystkie ograniczone ściany  $DG(P)$  są trójkątami.

# Charakteryzacja grafów Delaunaya

## Twierdzenie

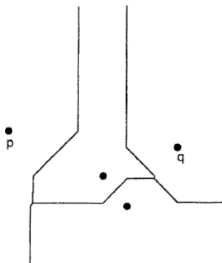
Niech  $P$  będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie.

- i) Trzy różne punkty  $p_i, p_j, p_k \in P$  są wierzchołkami tej samej ściany grafu Delaunaya wtedy i tylko wtedy, gdy koło przechodzące przez punkty  $p_i, p_j, p_k$  nie zawiera w swoim wnętrzu żadnych punktów ze zbioru  $P$ .
- ii) Dwa punkty  $p_i, p_j \in P$  tworzą krawędź grafu Delaunaya zbioru  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje koło  $C$ , które zawiera  $p_i, p_j$  na swoim brzegu oraz nie zawiera żadnego innego punktu z  $P$ .

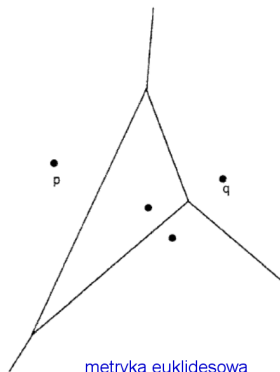
**Przestrzenie wielowymiarowe** Niech  $P$  jest zbiorem punktów w wielowymiarowej przestrzeni  $\mathbb{E}^d$  to maksymalna złożoność kombinatoryczna diagramu Voronoi wynosi  $\Theta(n^{\lceil d/2 \rceil})$  i może być obliczony w czasie  $O(n \log n + n^{\lceil d/2 \rceil})$ .

**Przestrzenie wielowymiarowe** Niech  $P$  jest zbiorem punktów w wielowymiarowej przestrzeni  $\mathbb{E}^d$  to maksymalna złożoność kombinatoryczna diagramu Voronoi wynosi  $\Theta(n^{\lceil d/2 \rceil})$  i może być obliczony w czasie  $O(n \log n + n^{\lceil d/2 \rceil})$ .

Inne metryki



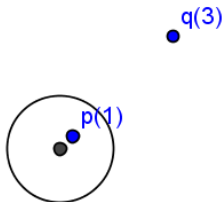
metryka Manhattan ( $L_1$ )



metryka euklidesowa



**Ważone diagramy Voronoi** Niech  $P$  będzie skończonym zbiorem punktów płaszczyzny. Każdemu punktowi ze zbioru  $P$  przydziela się wagę  $w(p) > 0$ . Definiuje się ważoną odległość dowolnego punktu płaszczyzny od centrum jako odległość euklidesową tego punktu od centrum dzieloną przez wagę tego centrum tj.  $\frac{d(x,p)}{w(p)}$  lub powiększoną o wagę centrum tj.  $d(x,p) + w(p)$ , gdzie  $p \in P, x \in \mathbb{R}^2$ .



Diagramy potęgowe - centrami komórek są koła odległość punktu od koła mierzymy jako długość odcinka stycznego do koła o początku w tym punkcie.






Diagramy potęgowe - centrami komórek są koła odległość punktu od koła mierzymy jako długość odcinka stycznego do koła o początku w tym punkcie.

Diagramy, w których centrami są odcinki - odległość punktu od odcinka mierzymy jako odległość tego punktu do najbliższego punktu z odcinka.

**Diagramy potęgowe** - centrami komórek są koła odległość punktu od koła mierzymy jako długość odcinka stycznego do koła o początku w tym punkcie.

**Diagramy, w których centrami są odcinki** - odległość punktu od odcinka mierzymy jako odległość tego punktu do najbliższego punktu z odcinka.

**Szkielety** - szkieletem wielokąta prostego nazywamy graf podziału jego wnętrza na obszary Voronoi wyznaczone przez krawędzie wielokąta.

-  F. Aurenhammer, *Voronoi diagrams - a survey of fundamental geometric data structures*, ACM Computing Surveys Vol. 23 Issue 3, Sept. 1991, pp. 345-405
-  F. Aurenhammer, H. Edelsbrunner, *An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoi diagram in the plane*, Pattern Recognition Vol. 17, No. 2, pp 251-257, 1984
-  M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Geometria obliczeniowa, algorytmy i zastosowania*, WNT 2007
-  J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press 1994
-  A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. N. Chiu, *Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams*, Probability and Statistics, Wiley, NYC, 2nd edition, 2000

Dziękuję za uwagę:-)