Pierścienie łączne - ich grafy i klasy Veldsmana

Marta Nowakowska
Uniwersytet Śląski

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki, Podlesice, wrzesień 22-26, 2014

Oznaczenia

- R - łączny pierścień z 1
- $\mathbb{Z}$ - pierścień liczb całkowitych
- M - lewostronny R-moduł

Definicje

Graf przecięć modułu

Niech M będzie modułem. **Graf przecięć** $G(M)$ **modułu** M to prosty, nieskierowany graf, w którym:

- zbiór wierzchołków $V(G(M)) =$ nietrywialne podmoduły modułu M,
- $N_1 \neq N_2$ są połączone $\iff N_1 \cap N_2 \neq 0$.

Definicje

Graf przecięć modułu

Niech M będzie modułem.**Graf przecięć** $G(M)$ **modułu** M to prosty, nieskierowany graf, w którym:

- zbiór wierzchołków $V(G(M)) =$ nietrywialne podmoduły modułu M,
- $N_1 \neq N_2$ są połączone $\iff N_1 \cap N_2 \neq 0$.

Graf przecięć pierścienia

Graf przecięć pierścienia R jest zdefiniowany jako $G({}_R R)$.

Definicje

Graf przecięć modułu

Niech M będzie modułem.**Graf przecięć** $G(M)$ **modułu** M to prosty, nieskierowany graf, w którym:

- zbiór wierzchołków $V(G(M)) =$ nietrywialne podmoduły modułu M,
- $N_1 \neq N_2$ są połączone $\iff N_1 \cap N_2 \neq 0$.

Graf przecięć pierścienia

Graf przecięć pierścienia R jest zdefiniowany jako $G({}_R R)$.

- Rząd grafu $|G(M)|$ to moc zbioru $V(G(M))$.

Ostatnie wyniki

- S. Akbari, R. Nikandish and M. J. Nikmehr: *Intersection graph of submodules of a module.* J. Algebra Appl. **11** (2012) 1250019.
- S. Akbari, H. A. Tavallaee and S. Khalashi Ghezelahmad: *Some results on the intersection graph of rings.* J. Algebra Appl.**12** (2013) 1250200.

Problem (Akbari, Tavallaee, Khalashi Ghezelahmad)

Scharakteryzować pierścienie R takie, że $G(R)$ jest nieskończony oraz R zawiera maksymalny lewostronny ideał L taki, że $deg(L) < \infty$.

Problem (Akbari, Tavallaee, Khalashi Ghezelahmad)

Scharakteryzować pierścienie R takie, że $G(R)$ jest nieskończony oraz R zawiera maksymalny lewostronny ideał L taki, że $deg(L) < \infty$.

Definicja

Niech $L \in V(G(R))$.

$$deg(L) = |\{T <_l R \mid L \cap T \neq 0\}|$$

Problem (Akbari, Tavallaee, Khalashi Ghezelahmad)

Scharakteryzować pierścienie R takie, że $G(R)$ jest nieskończony oraz R zawiera maksymalny lewostronny ideał L taki, że $deg(L) < \infty$.

Definicja

Niech $L \in V(G(R))$.

$$deg(L) = |\{T <_l R \mid L \cap T \neq 0\}|$$

Bardziej ogólnie

Niech $N \in V(G(M))$.

$$deg(N) = |\{T \in V(G(M)) \mid N \cap T \neq 0\}|$$

Częściowy wynik

Twierdzenie (Akbari, Tavallaee, Khalashi Ghezelahmad)

Jeśli R spełnia założenia problemu, to

(i) $R \cong M_2(\Delta)$, gdzie Δ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem
lub

(ii) $|\{I \mid$ I-maksymalny lewostronny ideał R$\}| < \infty$ oraz R zawiera dwustronny ideał o nieskończonym stopniu.

Rozwiązanie problemu

Twierdzenie

pierścień R spełnia założenia problemu $\iff$ R jest izomorficzny z jednym z poniższych pierścieni

(i) $M_2(\Delta)$, gdzie Δ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem; lub

(ii) $\begin{pmatrix} \Delta & \Delta \\ 0 & P \end{pmatrix} \subseteq M_2(\Delta)$, gdzie Δ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem oraz P jest jego podpierścieniem z dzieleniem.

O liczbie klikowej i chromatycznej

Kliką grafu G nazywamy podzbiór C zbioru $V(G)$, w którym każde dwa różne wierzchołki są połączone.

O liczbie klikowej i chromatycznej

Kliką grafu G nazywamy podzbiór C zbioru $V(G)$, w którym każde dwa różne wierzchołki są połączone.

Liczba klikowa grafu

$$\omega(G) = sup\{|C| \mid C \text{ jest kliką}\}$$

Liczba chromatyczna

Kolorowanie grafu

Powiemy, że graf G **może być pokolorowany przez elementy ze zbioru** T, jeśli istnieje odwzorowanie surjektywne $f : V(G) \to T$ takie, że

$$\text{jeśli } v \neq w \in V(G) \text{ są połączone, to } f(v) \neq f(w).$$

Liczba chromatyczna

Kolorowanie grafu

Powiemy, że graf G **może być pokolorowany przez elementy ze zbioru** T, jeśli istnieje odwzorowanie surjektywne $f : V(G) \to T$ takie, że

$$\text{jeśli } v \neq w \in V(G) \text{ są połączone, to } f(v) \neq f(w).$$

Liczba chromatyczna

$$\chi(G) = |T|,$$

gdzie T jest takim zbiorem, że graf G może być pokolorowany przez elementy ze zbioru T i G nie może być pokolorowany przez elementy ze zbioru mocy mniejszej niż $|T|$.

Oczywiście

$$\omega(G) \leqslant \chi(G).$$

Oczywiście

$$\omega(G) \leqslant \chi(G).$$

Pytanie

Kiedy $\omega(G(M)) = \chi(G(M))$?

O skończonej liczbie klikowej

Twierdzenie (Akbari, Tavallaee, Khalashi Ghezelahmad)

Niech R będzie pierścieniem.

- $\omega(G(R)) < \infty \Longrightarrow \chi(G(R)) < \infty$
- Jesli R jest zredukowanym pierścieniem i $\omega(R) < \infty$, to

$$\omega(G(R)) = \chi(G(R)).$$

OPis$G(M)$, kiedy $G(M)$ jest nieskończony i $\omega(G(M)) < \infty$

Twierdzenie

Dla modułu M, $G(M)$ jest nieskończony oraz $\omega(G(M)) < \infty \iff$ zachodzą następujące warunki

(i) $Soc(M) = S \oplus S'$ i S jest prostym modułem takim, że $End(S)$ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem;

(ii) Tylko skończenie wiele podmodułów M nie jest zawartych w $Soc(M)$.

OPis$G(M)$, kiedy $G(M)$ jest nieskończony i $\omega(G(M)) < \infty$

Twierdzenie

Dla modułu M, $G(M)$ jest nieskończony oraz $\omega(G(M)) < \infty \Longleftrightarrow$ zachodzą następujące warunki

(i) $Soc(M) = S \oplus S'$ i S jest prostym modułem takim, że $End(S)$ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem;

(ii) Tylko skończenie wiele podmodułów M nie jest zawartych w $Soc(M)$.

Wniosek

Jeśli M jest modułem takim, że $G(M)$ jest nieskończony oraz $\omega(G(M)) < \infty$, to

$$\omega(G(M)) = \chi(G(M)).$$

Pewne główne wyniki

Twierdzenie

Niech T będzie maksymalnym podmodułem modułu M. Wtedy $G(M)$ jest nieskończony i $deg(T) < \infty \iff$

(i) $M = S \oplus T$ dla pewnego minimalnego podmodułu S modułu M;

(ii) T zawiera dokładnie jeden minimalny podmoduł S' taki, że $S' \cong S$;

(iii) $End(S)$ jest nieskończonym pierścieniem z dzieleniem;

(iv) $G(M/S')$ jest nieskończony.

Twierdzenie

N jest nietrywialnym podmodułem modułu M takim, że $G(M)$ jest nieskończony i $deg(N) < \infty \iff$

(i) N zawiera dokładnie jeden podmoduł minimalny S;
(ii) $End(S)$ jest nieskończony;
(iii) $G(M/S)$ jest skończony lub, równoważnie, $deg(S) < \infty$;
(iv) Istnieje podmoduł A modułu M taki, że $N \cap A = 0$ i podmoduł B modułu A taki, że $A/B \simeq S$.

Pierścienie filialne i lewostronnie filialne

R-**pierścień filialny**, gdy każdy jego osiągalny podpierścień jest ideałem w R.

Pierścienie filialne i lewostronnie filialne

R-**pierścień filialny**, gdy każdy jego osiągalny podpierścień jest ideałem w R.

$S \subseteq R$. S-**osiągalny podpierścień pierścienia R**, gdy istnieją takie podpierścienie $A_0, A_1, \ldots, A_n$, że

- $A_0 = A \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = R$
- $A_i \triangleleft A_{i+1}$, dla $i = 0, \ldots, n-1$

Pierścienie filialne i lewostronnie filialne

R-**pierścień filialny**, gdy każdy jego osiągalny podpierścień jest ideałem w R.

$S \subseteq R$. S-**osiągalny podpierścień pierścienia R**, gdy istnieją takie podpierścienie $A_0, A_1, \ldots, A_n$, że

- $A_0 = A \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = R$
- $A_i \triangleleft A_{i+1}$, dla $i = 0, \ldots, n-1$

R-pierścień filialny, jesli dla dowolnych I, J

$$I \triangleleft J \triangleleft R \Longrightarrow I \triangleleft R$$

Pierścienie filialne i lewostronnie filialne

R-**pierścień filialny**, gdy każdy jego osiągalny podpierścień jest ideałem w R.

$S \subseteq R$. S-**osiągalny podpierścień pierścienia R**, gdy istnieją takie podpierścienie $A_0, A_1, \ldots, A_n$, że

- $A_0 = A \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = R$
- $A_i \triangleleft A_{i+1}$, dla $i = 0, \ldots, n-1$

R-pierścień filialny, jesli dla dowolnych I, J

$$I \triangleleft J \triangleleft R \Longrightarrow I \triangleleft R$$

R-**pierścień lewostronnie filialny**, jesli dla dowolnych I, J

$$I <_l J <_l R \Longrightarrow I <_l R$$

Motywacje i trochę historii

- **1981** - F. Szász: pierwsze pojawienie się pierścieni filialnych bez użycia nazwy

Motywacje i trochę historii

- **1981** - F. Szász: pierwsze pojawienie się pierścieni filialnych bez użycia nazwy

- **1983** - G. Erlich: konstrukcja pierścieni przemiennych filialnych

Motywacje i trochę historii

- **1981** - F. Szász: pierwsze pojawienie się pierścieni filialnych bez użycia nazwy
- **1983** - G. Erlich: konstrukcja pierścieni przemiennych filialnych
- **1986** - A. D. Sands: charakteryzacja pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych

Motywacje i trochę historii

- **1981** - F. Szász: pierwsze pojawienie się pierścieni filialnych bez użycia nazwy

- **1983** - G. Erlich: konstrukcja pierścieni przemiennych filialnych

- **1986** - A. D. Sands: charakteryzacja pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych

Twierdzenie

Każdy osiągalny podpierścień pierścienia R jest ideałem w R $\Longleftrightarrow$ $(a) = (a)^2 + \mathbb{Z}a$ dla każdego $a \in R$.

Motywacje i trochę historii

- **1981** - F. Szász: pierwsze pojawienie się pierścieni filialnych bez użycia nazwy

- **1983** - G. Erlich: konstrukcja pierścieni przemiennych filialnych

- **1986** - A. D. Sands: charakteryzacja pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych

Twierdzenie

Każdy osiągalny podpierścień pierścienia R jest ideałem w R $\iff$ $(a) = (a)^2 + \mathbb{Z}a$ dla każdego $a \in R$.

Twierdzenie

Każdy lewostronnie osiągalny podpierścień pierścienia R jest lewostronnym ideałem w R $\iff$ $R^*a = (R^*a)^2 + \mathbb{Z}a$ dla każdego $a \in R$.

- **1988** - R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski: charakteryzacja pierścieni filialnych

• **1988** - R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski: charakteryzacja pierścieni filialnych

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne

- R jest pierścieniem filialnym
- $(a) = (a)^2 + \mathbb{Z}a$ dla każdego $a \in R$
- Jeśli $I \lhd R$ oraz $S \subseteq I$, to $I^2 + S \lhd R$
- Jeśli $I \lhd R$ oraz $S \subseteq I$, to dla każdego $n \geqslant 2$, $I^n + S \lhd R$
- Istnieje $n \geqslant 2$ takie, że dla każdych $I \lhd R$ oraz $S \subseteq I$, $I^n + S \lhd R$
- Jeśli $I \lhd R$ oraz $S \subseteq I$, to dla pewnego $n \geqslant 2$, $I^n + S \lhd R$

- **2003** - R. Andruszkiewicz: charakteryzacja filialnych pierścieni całkowitych charakterystyki zero

- **2003** - R. Andruszkiewicz: charakteryzacja filialnych pierścieni całkowitych charakterystyki zero

Twierdzenie

Pierścień całkowity R charakterystyki zero jest filialny $\iff$

(i) $R =< 1 > +pR$ dla każdego $p \in \mathbb{P}$

(ii) Dla każdego $a \in R$, $a \neq 0$, istnieje $m \in \mathbb{N}$ i $b \in R^*$ takie, że $a = mb$.

- **2007** - R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska: charakteryzacja beztorsyjnych, przemiennych, zredukowanych pierścieni filialnych

- **2007** - R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska: charakteryzacja beztorsyjnych, przemiennych, zredukowanych pierścieni filialnych

Twierdzenie

Niech pierścień R będzie beztorsyjny, przemienny, zredukowany i taki, że $\prod(R) \neq \emptyset$. Wtedy R is filialny $\Longleftrightarrow |R/pR| = p$ dla każdego $p \in \prod(R)$ i dla każdego $a \in R$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $ma \in Ra^2$.

$$\prod(R) = \{p \in \mathbb{P} \mid R \neq pR\}$$

- Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, gdy dla każdego $r \in R$ istnieje $a \in R$ taki, że $r = ar^2$.

- Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, gdy dla każdego $r \in R$ istnieje $a \in R$ taki, że $r = ar^2$.

- $\mathcal{R}$- klasa pierścieni silnie regularnych

- Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, gdy dla każdego $r \in R$ istnieje $a \in R$ taki, że $r = ar^2$.

- $\mathcal{R}$- klasa pierścieni silnie regularnych

- **2009** - M. Filipowicz, E.R. Puczyłowski: opis struktury lewostronnie filialnych algebr nad ciałem

Twierdzenie

A jest lewostronnie filialną algebrą $\Longleftrightarrow$ $A/\mathcal{R}(A)$ jest silnie regularny, $\mathcal{R}(A)$ jest H-algebrą oraz

i) $A = I_A(\mathcal{R}(A)) + \mathcal{R}(A)$ lub

ii) $A = Fe + I_A(\mathcal{R}(A)) + \mathcal{R}(A)$, gdzie $\mathcal{R}(A) \neq 0$ oraz e jest idempotentem algebry A takim, że $eb = b$ dla każdego $b \in \mathcal{R}(A)$.

- **2010** - R.Andruszkiewicz, K. Pryszczepko: charakteryzacja noetherowskich, przemiennych, zredukowanych pierścieni filialnych

• **2010** - R.Andruszkiewicz, K. Pryszczepko: charakteryzacja noetherowskich, przemiennych, zredukowanych pierścieni filialnych

Twierdzenie

i) R jest noetherowskim, przemiennym, zredukowanym pierścieniem filialnym.

ii) $R \cong (\bigoplus_{j=1}^{k} F_j) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} m_i D_i)$, gdzie D_i to filialne pierścienie całkowite o charakterystyce 0, które nie są ciałami, $m_i \in \mathbb{N}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$ i $\prod(Di) \cap \prod(Dt) = \emptyset$ dla $i \neq t$ oraz F_j jest ciałem dla każdego $j = 1, \ldots, k$.

Przykłady i konstrukcje

- F- ciało

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l M_2(F),$$

Przykłady i konstrukcje

- F- ciało

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l M_2(F),$$

ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem lewostronnym w $M_2(F)$

Przykłady i konstrukcje

- F- ciało
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l M_2(F),$$

ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem lewostronnym w $M_2(F)$

- Niech $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$. R jest lewostronnie filialny.

Przykłady i konstrukcje

- F- ciało

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l M_2(F),$$

ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem lewostronnym w $M_2(F)$

- Niech $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$. R jest lewostronnie filialny.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix} \triangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix} \triangleleft R,$$

Przykłady i konstrukcje

- F- ciało

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l \begin{pmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} <_l M_2(F),$$

ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}$ nie jest ideałem lewostronnym w $M_2(F)$

- Niech $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$. R jest lewostronnie filialny.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix} \triangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix} \triangleleft R,$$

ale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix} \ntriangleleft R.$

Radykał pierwszy

- $\beta(R)$ - radykał pierwszy pierścienia R

$$\beta(R) = \bigcap\{I \triangleleft R \mid \text{ I jest ideałem pierwszym w R}\}$$

Radykał pierwszy

- $\beta(R)$ - radykał pierwszy pierścienia R

$$\beta(R) = \bigcap\{I \lhd R \mid \text{ I jest ideałem pierwszym w R}\}$$

- R nazywamy pierścieniem **pierwszym**, gdy dla dowolnych $I \lhd R$, $J \lhd R$

$$IJ = 0 \Longrightarrow I = 0 \text{ lub } J = 0$$

Radykał pierwszy

- $\beta(R)$ - radykał pierwszy pierścienia R

$$\beta(R) = \bigcap\{I \triangleleft R \mid \text{ I jest ideałem pierwszym w R}\}$$

- R nazywamy pierścieniem **pierwszym**, gdy dla dowolnych $I \triangleleft R$, $J \triangleleft R$

$$IJ = 0 \Longrightarrow I = 0 \text{ lub } J = 0$$

- Ideał I pierścienia R nazywamy **pierwszym**, gdy R/I jest pierścieniem pierwszym.

Radykał pierwszy

- $\beta(R)$ - radykał pierwszy pierścienia R

$$\beta(R) = \bigcap\{I \lhd R \mid \text{ I jest ideałem pierwszym w R}\}$$

- R nazywamy pierścieniem **pierwszym**, gdy dla dowolnych $I \lhd R$, $J \lhd R$

$$IJ = 0 \Longrightarrow I = 0 \text{ lub } J = 0$$

- Ideał I pierścienia R nazywamy **pierwszym**, gdy R/I jest pierścieniem pierwszym.

Fakt

Jeśli R jest pierścieniem lewostronnie filialnym, to

$$\beta(R) = \sum\{a \in R \mid \exists_{n\in\mathbb{N}}\ a^n = 0\} = \sum\{I \lhd R \mid \exists_{n\in\mathbb{N}}\ I^n = 0\}$$

Fakt

Każdy β-radykalny pierścień filialny jest lewostronnie filialny.

Fakt

Każdy β-radykalny pierścień filialny jest lewostronnie filialny.

- Niech $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $R^3 = 0$.

Fakt

Każdy β-radykalny pierścień filialny jest lewostronnie filialny.

- Niech $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $R^3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd R,$$

Fakt

Każdy β-radykalny pierścień filialny jest lewostronnie filialny.

- Niech $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $R^3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd R,$$

ale $\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\lhd R$.

Fakt

Każdy β-radykalny pierścień filialny jest lewostronnie filialny.

- Niech $R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $R^3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & p^2\mathbb{Z}_{p^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lhd R,$$

ale $\begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ntriangleleft R$.

- Niech R będzie β-radykalną algebrą nad ciałem. Wówczas algebra R jest filialna $\iff$ R jest lewostronnie filialna.

Pewne charakteryzacje

Fakty

- Pierścień $\beta-$radykalny jest filialny $\iff$ jest H-pierścieniem.

Pewne charakteryzacje

Fakty

- Pierścień $\beta-$radykalny jest filialny $\Longleftrightarrow$ jest H-pierścieniem.

- Pierścień $\beta-$radykalny jest lewostronnie filialny $\Longleftrightarrow$ jest lewostronnym H-pierścieniem.

Własności

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych są dziedziczne.

Własności

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych są dziedziczne.

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filailnych są zamknięte na obrazy homomorficzne.

Własności

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych są dziedziczne.

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filailnych są zamknięte na obrazy homomorficzne.

- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest pierścieniem filialnym

Własności

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych są dziedziczne.

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filailnych są zamknięte na obrazy homomorficzne.

- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest pierścieniem filialnym

$$A = \{(a, a) \mid a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \lhd 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

ale $A \ntriangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Własności

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filialnych są dziedziczne.

- Klasy pierścieni filialnych i lewostronnie filailnych są zamknięte na obrazy homomorficzne.

- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest pierścieniem filialnym

$$A = \{(a, a) \mid a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

ale $A \ntriangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

- Klasa pierścieni filialnych nie jest zamknięta na rozszerzenia, tzn.

$$I \triangleleft R, I \text{ oraz } R/I \text{ są filialne } \not\Longrightarrow R - \text{ filialny}$$

Własności

- Klasa pierścieni filialnych nie jest zamknięta na dołączanie jedynki.

Zauważmy, że $(\mathbb{Z}^0)^* \cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

$$J = \{\begin{pmatrix} 2a & 4b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \triangleleft \{\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \triangleleft (\mathbb{Z}^0)^*,$$

ale $J \not\triangleleft (\mathbb{Z}^0)^*$

Klasy Veldsmana

Niech $x, y, z \in \{l, r, t\}$. Rozważmy klasy

$$\mathcal{K}(x, y; z) = \{R \mid J <_x I <_y R \Longrightarrow J <_z R\},$$

gdzie $t = \triangleleft$.

Klasy Veldsmana

Niech $x, y, z \in \{l, r, t\}$. Rozważmy klasy

$$\mathcal{K}(x, y; z) = \{R \mid J <_x I <_y R \Longrightarrow J <_z R\},$$

gdzie $t = \lhd$.

- $\mathcal{K}(l, l; l)$ =pierścienie lewostronnie filialne
- $\mathcal{K}(t, t; t)$ =pierścienie filialne

Klasy Veldsmana

Niech $x, y, z \in \{l, r, t\}$. Rozważmy klasy

$$\mathcal{K}(x, y; z) = \{R \mid J <_x I <_y R \Longrightarrow J <_z R\},$$

gdzie $t = \triangleleft$.

- $\mathcal{K}(l, l; l)$ =pierścienie lewostronnie filialne
- $\mathcal{K}(t, t; t)$ =pierścienie filialne

- Zachodzą inkluzje

$$\mathcal{K}(l, l; l) \subseteq \mathcal{K}(t, l; l) \subseteq \mathcal{K}(l, t; l) \subseteq \mathcal{K}(t, t; l)$$

$$\mathcal{K}(t, t; t) \subseteq \mathcal{K}(t, t; l)$$

1991 - Veldsman: charakteryzacje

- $R \in \mathcal{K}(t, l; l) \iff R^*r = R^*r^2 + rRr + Rr^2Rr + \mathbb{Z}$ dla każdego $r \in R$
- $R \in \mathcal{K}(l, t; l) \iff R^*r = R^*r^2 + rRr + RrRr + \mathbb{Z}$ dla każdego $r \in R$
- $R \in \mathcal{K}(t, t; l) \iff R^*r \subseteq (r)^3 + r(r) + (r)r + \mathbb{Z}$ dla każdego $r \in R$

Kilka wyników

- Klasy $\mathcal{K}(t, l; l), \mathcal{K}(l, t; l)$ są dziedziczne, ale nie są lewostronnie dziedziczne.

Kilka wyników

- Klasy $\mathcal{K}(t, l; l), \mathcal{K}(l, t; l)$ są dziedziczne, ale nie są lewostronnie dziedziczne.

Pytanie: Czy klasa $\mathcal{K}(t, t; l)$ jest dziedziczna?

Kilka wyników

- Klasy $\mathcal{K}(t,l;l), \mathcal{K}(l,t;l)$ są dziedziczne, ale nie są lewostronnie dziedziczne.

Pytanie: Czy klasa $\mathcal{K}(t,t;l)$ jest dziedziczna?

Fakt

Jeśli $R \in \mathcal{K}(t,t;l)$ oraz R jest algebrą nad ciałem, to algebra R jest dziedziczna.

Własności $\beta(R)$

Twierdzenie

- Jeśli $R \in \mathcal{K}(l; t; l)$, to każdy podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności β-radykalne pierścienie $\mathcal{K}(l, t; l)$ są lewostronnymi H-pierścieniami.

- Jeśli $R \in \mathcal{K}(t; l; l)$ to każdy nil podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności $\beta(R) = \{r \in R \mid r^n = 0 \text{ dla pewnego n}\}$.

Własności $\beta(R)$

Twierdzenie

• Jeśli $R \in \mathcal{K}(I; t; I)$, to każdy podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności β-radykalne pierścienie $\mathcal{K}(I, t; I)$ są lewostronnymi H-pierścieniami.

• Jeśli $R \in \mathcal{K}(t; I; I)$ to każdy nil podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności $\beta(R) = \{r \in R \mid r^n = 0 \text{ dla pewnego n}\}$.

• Pytanie: Załóżmy, że $R \in \mathcal{K}(t, t; I)$. Czy podpierścienie zawarte w $\beta(R)$ są lewostronnymi ideałami w R?

Własności $\beta(R)$

Twierdzenie

• Jeśli $R \in \mathcal{K}(l; t; l)$, to każdy podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności β-radykalne pierścienie $\mathcal{K}(l, t; l)$ są lewostronnymi H-pierścieniami.

• Jeśli $R \in \mathcal{K}(t; l; l)$ to każdy nil podpierścień $\beta(R)$ jest lewostronnym ideałem w R. W szczególności $\beta(R) = \{r \in R \mid r^n = 0 \text{ dla pewnego n}\}$.

• Pytanie: Załóżmy, że $R \in \mathcal{K}(t, t; l)$. Czy podpierścienie zawarte w $\beta(R)$ są lewostronnymi ideałami w R?

• Jeśli odpowiedź na powyższe pytanie jest twierdząca, to klasa $\mathcal{K}(t, t; l)$ jest dziedziczna.

Twierdzenia strukturalne

Twierdzenie

Jeśli $R \in \mathcal{K}(t; t; l)$ jest algebrą nad ciałem F oraz $I \lhd R$, to $I^3 = I^4$.

Twierdzenia strukturalne

Twierdzenie

Jeśli $R \in \mathcal{K}(t;t;l)$ jest algebrą nad ciałem F oraz $I \lhd R$, to $I^3 = I^4$.

Twierdzenie

Jeśli F jest ciałem takim, że dla każdej liczby pierwszej p, $F \ncong \mathbb{Z}_p$. Wtedy F-algebra $R \in \mathcal{K}(t;t;l) \iff RI = I^3$ dla każdego $I \lhd R$.

Twierdzenia strukturalne

Twierdzenie

Jeśli $R \in \mathcal{K}(t;t;l)$ jest algebrą nad ciałem F oraz $I \triangleleft R$, to $I^3 = I^4$.

Twierdzenie

Jeśli F jest ciałem takim, że dla każdej liczby pierwszej p, $F \ncong \mathbb{Z}_p$. Wtedy F-algebra $R \in \mathcal{K}(t;t;l) \iff RI = I^3$ dla każdego $I \triangleleft R$.

Twierdzenie

Jeśli $R \in \mathcal{K}(l,t;l)$ i R jest F-algebrą nad ciałem F, to $L^4 = L^3$, dla każdego lewostronnego ideału L pierścienia R.

Charakteryzacje

Następujące klasy pierścieni się pokrywają:

- pierścienie pierwsze $\mathcal{K}(t; l; l)$,
- dziedziny $\mathcal{K}(t; l; l)$,
- dziedziny $\mathcal{K}(l; t; l)$,
- pierścienie pierwsze $\mathcal{K}(t; r; r)$.

Twierdzenie

Dla danego pierścienia R następujące warunki są rónoważne

(i) $R \in \mathcal{K}_d$

(ii) R jest albo przemienną filialną dziedziną albo istnieje prosta nieprzemienna dziedzina H z centroidem C taka, że R jest izomorficzny z podpierścieniem T pierścienia H^C spełniającym $H \subseteq T \subseteq H + \mathbb{Z}e$, gdzie e jest jedynką C;

(iii)
   a) R jest przemienną filialną dziedziną lub
   b) R jest prostą nieprzemienną dziedziną lub
   c) R jest dziedziną, $H(R) \neq 0$ jest prostą nieprzemienną dziedziną, $R = H(R) + S$, gdzie S jest niezerowym centralnym podpierścieniem R takim, że $S \cap H(R) = 0$ i $S \cong \mathbb{Z}_p$ dla pewnej liczby pierwszej p lub S jest izomorficzny z niezerowym podpierścieniem $\mathbb{Z}$.

Wnioski

• Każdy pierwszy pierścień z klasy $\mathcal{K}(t, I; I)$ jest albo nieprzemienną prostą dziedziną albo może być homomorficznie odwzorowany na przemienną filialną dziedzinę.
• Jeśli R jest półpierwszym pierścieniem z klasy $\mathcal{K}(t, I; I)$, to $R/\mathcal{S}(R)$ jest przemiennym, zredukowanym, fililanym pierścieniem i wszystkie pierwsze obrazy $\mathcal{S}(R)$ są prostymi nieprzemiennymi dziedzinami.

Dziękuję za uwagę!

- S. Akbari, R. Nikandish and M. J. Nikmehr: *Intersection graph of submodules of a module.* J. Algebra Appl. **11** (2012) 1250019.
- S. Akbari, H. A. Tavallaee and S. Khalashi Ghezelahmad: *Some results on the intersection graph of rings.* J. Algebra Appl.**12** (2013) 1250200.
- R.R. Andruszkiewicz: *The classification of intergral domains in which the relation of being an ideal is transitive*, Comm. Algbera 31 (2003), pp. 2067–2093.
- R. R. Andruszkiewicz, E.R. Puczyłowski: *On filial rings*, Portugal. Math. 45 (1988), pp. 139–149.
- R. R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska: *Commutative reduced filial rings*, Algebra Discrete Math. 3 (2007), pp. 18–26.

- D. Bertholf, G. Walls: *Graphs of finite abelian groups.* Czechoslovak Math. J. **28**(103) (1978), 365—368.
- G. Ehrlich: *Filial rings*, Portugal. Math. 42 (1983-84), pp. 185–194.
- M. Filipowicz, E.R. Puczyłowski: *Left filial rings*, Algebra Colloq. 11 (2004), pp. 335–344.
- - , The structure of left filial algebras over a field, Taiwan. J. Math. 13/3 (2009), pp. 1017–1029.
- A.D. Sands: *On ideals in over-rings*, Publ. Math. Debrecen 35 (1988), pp. 273–279.

S. Veldsman: *Extensions and ideals of rings*, Publ. Math. Debrecen 38 (1991), pp. 297–309.

B. Zelinka: *Intersection graphs of finite abelian groups.* Czechoslovak Math. J. **25**(100) (1975), 171—174