

WIELOMIANOGRAFIA Z NIESTANDARDOWYMI ITERACJAMI

K. Gdawiec. W. Kotarski, A. Lisowska

Instytut Informatyki

Letnia Szkoła IM – Podlesice 2014

PLAN

1. Wielomianografia (polynomiography)
2. Iteracje
3. Podstawowa Rodzina Iteracji
4. Rodzina Iteracji Eulera-Schrödera
5. Uogólnienia metody Newtona
6. Eksperymenty
 - Parametry rzeczywiste
 - Parametry zespolone
 - Różne mapy kolorów
7. Uwagi końcowe

1. Wielomianografia

B. Kalantari – 2005 patent USA – za tworzenie estetycznych wzorów przez zastosowanie algorytmów znajdowania pierwiastków wielomianów zmiennej zespolonej i wyznaczania ich basenów przyciągania.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

Sumerowie – 3000 pne.

Zasadnicze Tw. Algebry

Caley -1879

Julia -1919

- Iteracja Newtona: z_0 dane

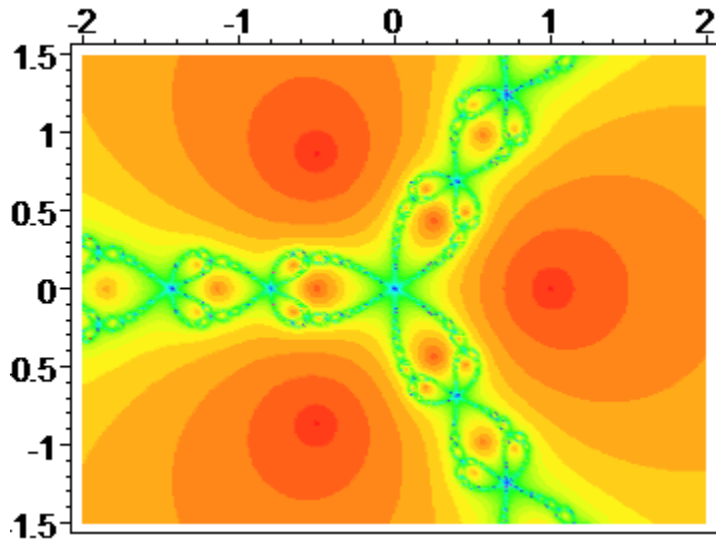
$$z_{k+1} = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Iteracja Halleya : z_0 dane

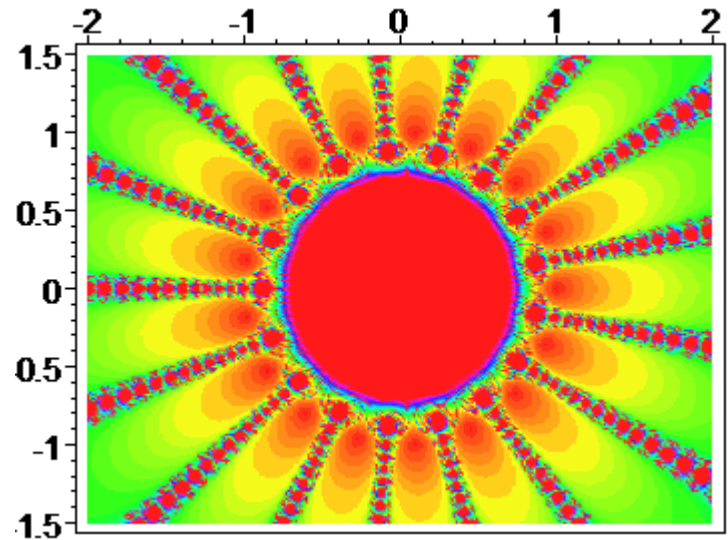
$$z_{k+1} = z_k - \frac{1}{a_k}, \quad \text{gdzie } a_k = \frac{p'(z_k)}{p(z_k)} - \frac{1}{2} \frac{p''(z_k)}{p'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ciąg $\{z_k; k = 0, 1, \dots\}$ może być zbieżny do pierwiastka wielomianu bądź nie. Zbieżność oznacza, że po pewnej liczbie iteracji znajduje się przybliżenie pierwiastka z zadaną dokładnością. Punkty startowe koloruje się ze względu na liczbę wykonanych iteracji.

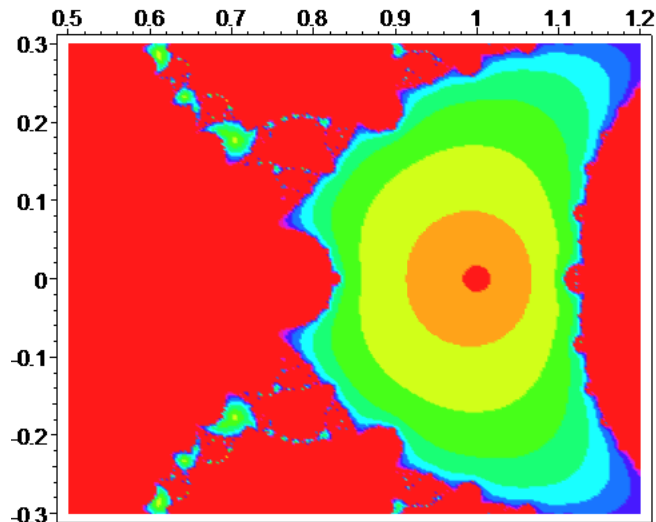
Iteracja Newtona



$$z^3 - 1 = 0$$



$$z^{17} - 1 = 0$$



Iteracja Halleya

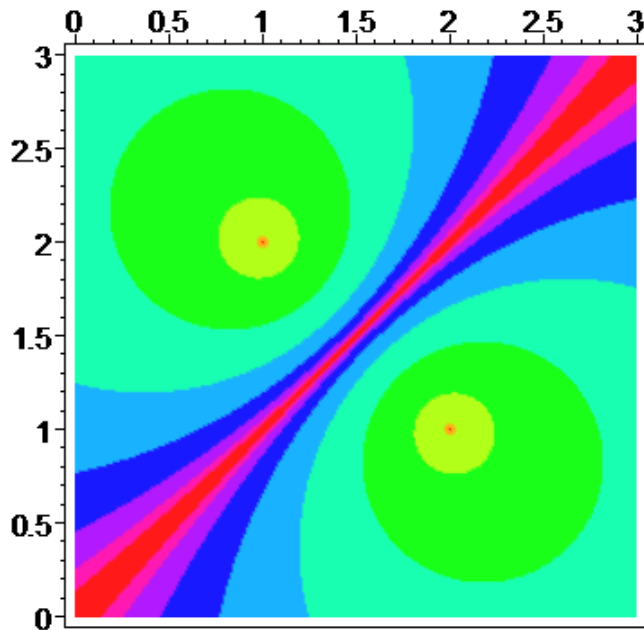
$$4z^4 + 2z^3 - 5z - 1 = 0$$

Macierze permutacyjne

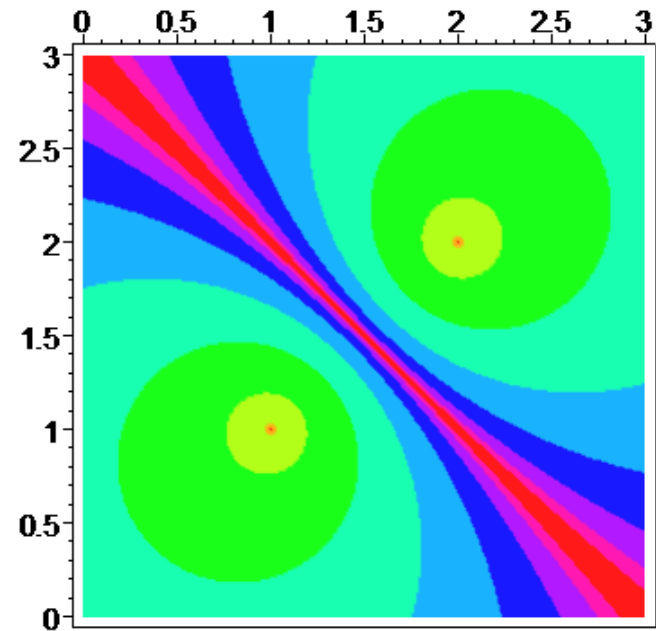
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

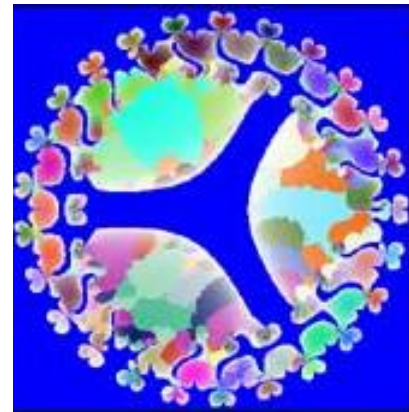
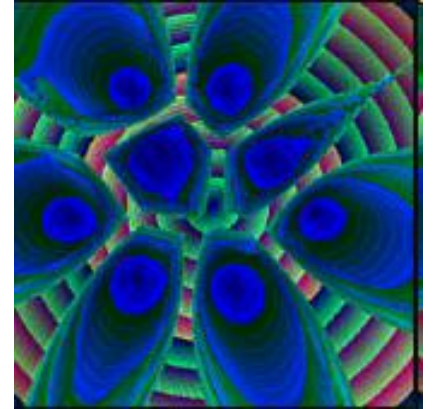
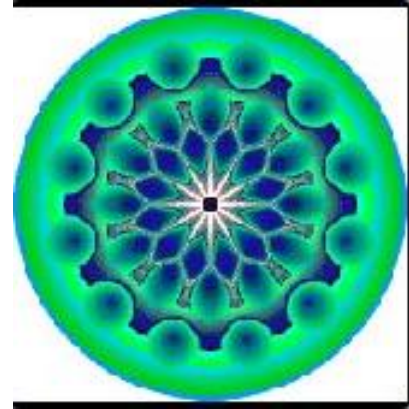
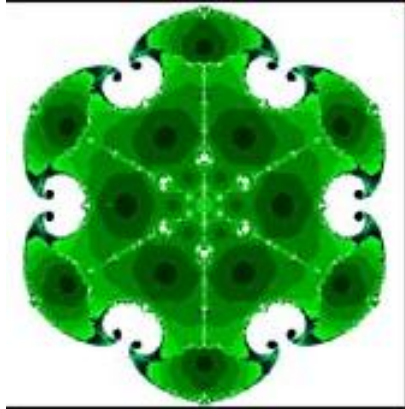
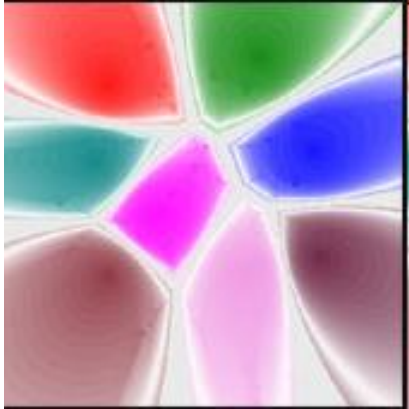
$$\left[\begin{array}{c} \leftarrow -(1+i) \rightarrow \\ \leftarrow -(2+2i) \rightarrow \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{c} \leftarrow -(1+2i) \rightarrow \\ \leftarrow -(2+i) \rightarrow \end{array} \right]$$



Wielomianografy



<http://www.polynomiography.com>

2. ITERACJE

Niech (X, d) przestrzeń metryczna zupełna, $T : X \rightarrow X$ jest zwięzające, $x_0 \in X$.

- Iteracja Picarda (1890):

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

- Iteracja Manna (1953):

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Iteracja Ishikawy (1974):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(y_n), \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$ i $\beta_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Iteracja Noora (2000):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(y_n), \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(z_n), \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$ i $\beta_n, \gamma_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Iteracja Suantai (2005):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n + \alpha_n T(y_n) + \beta_n T(z_n), \\ y_n = (1 - a_n - b_n)x_n + a_n T(z_n) + b_n T(x_n), \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, a_n, b_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n \in [0, 1]$,
 $a_n + b_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \infty$.

- S-Iteracja, Agarwal et al. (2007):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T(x_n) + \alpha_n T(y_n), \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$ i $\beta_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- SP-iteracja (2011):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T(y_n), \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T(z_n), \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$ i $\beta_n, \gamma_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Iteracja-CR, Chugh et al. (2012):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T(y_n), \\ y_n = (1 - \beta_n)T(x_n) + \beta_n T(z_n), \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

- Iteracja Khana (2013):

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n), \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Iteracja Karakaya et al. (2013):

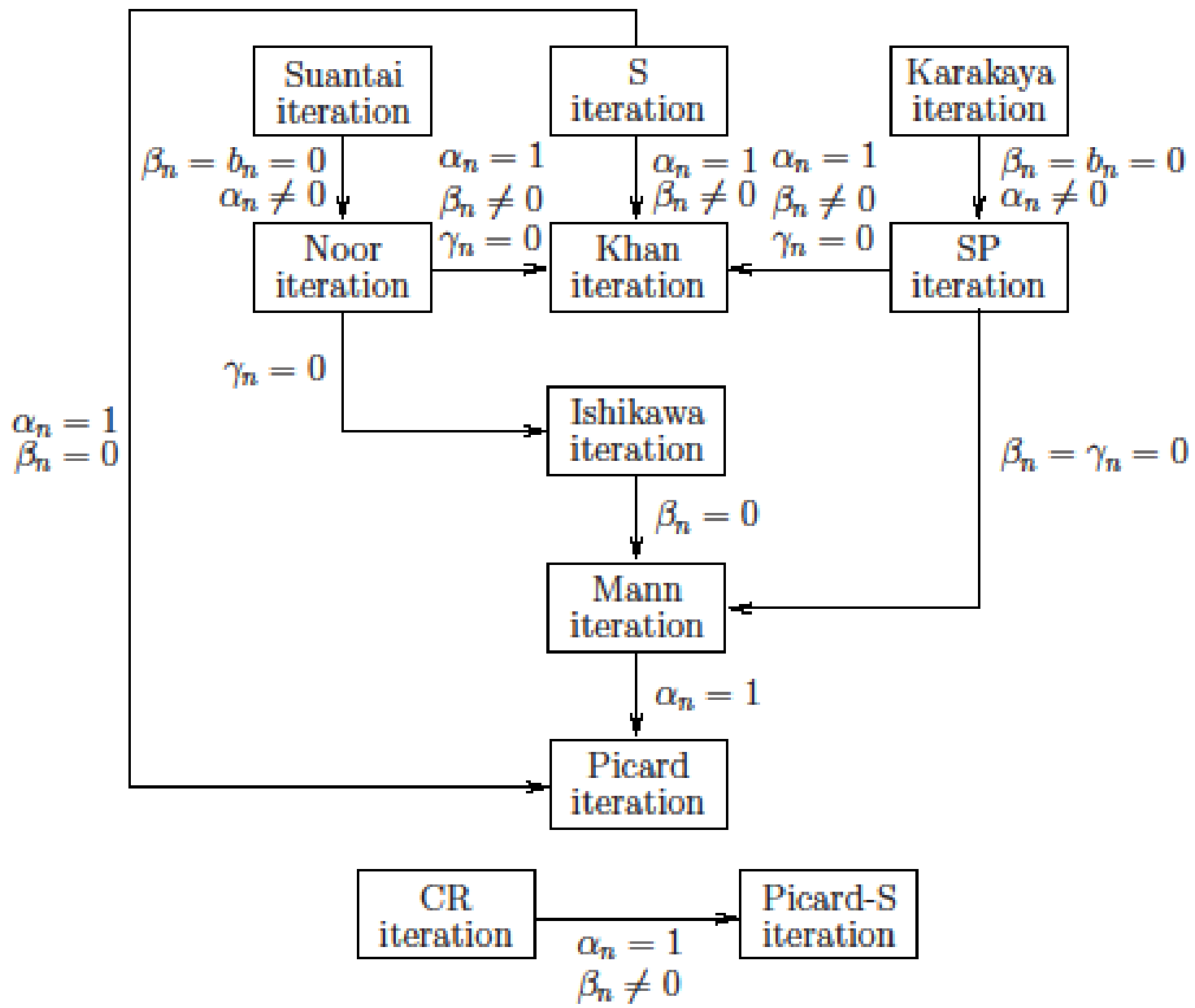
$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)y_n + \alpha_n T(y_n) + \beta_n T(z_n), \\ y_n = (1 - a_n - b_n)z_n + a_n T(z_n) + b_n T(x_n), \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

gdzie $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, a_n, b_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n \in [0, 1]$, $a_n + b_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \infty$.

- Iteracja Picard–S, Gürsoy–Karakaya (2014):

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(y_n), \\ y_n = (1 - \alpha_n)T(x_n) + \alpha_n T(z_n), \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (11)$$

gdzie $\alpha_n \in (0, 1]$ i $\beta_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.



Dalej ograniczamy się do $X = \mathbb{C}$. Bierzemy $z_0 \in \mathbb{C}$ i $\alpha_n = \alpha$, $\beta_n = \beta$, $\gamma_n = \gamma$, $a_n = a$, $b_n = b$ dla $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha \in (0, 1]$, $\beta, \gamma, a, b \in [0, 1]$, $\alpha + \beta \in [0, 1]$ i $a + b \in [0, 1]$. Jeśli $\alpha + \beta \in [0, 1]$, to $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + \beta) = \infty$.

Niech p oznacza dowolny wielomian zespolony. Standardowa metoda Newtona znajdowania miejsc zerowych p ma postać:

$$z_{n+1} = N(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

gdzie

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad (13)$$

i $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem startowym.

3. Podstawowa Rodzina Iteracji

Niech $\deg p \geq 2$. Definiujemy ciąg funkcji $D_m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: $D_0(z) = 1$ i dla $m > 0$:

$$D_m(z) = \det \begin{bmatrix} p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} & \cdots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} & \frac{p^{(m)}(z)}{m!} \\ p(z) & p'(z) & \cdots & \cdots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} \\ 0 & p(z) & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \frac{p''(z)}{2!} \\ 0 & 0 & \cdots & p(z) & p'(z) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Elementy Podstawowej Rodziny Iteracji definiujemy następująco:

$$B_m(z) = z - p(z) \frac{D_{m-2}(z)}{D_{m-1}(z)}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (15)$$

Pierwsze elementy Rodziny Podstawowej są postaci:

$$B_2(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad (16)$$

$$B_3(z) = z - \frac{2p'(z)p(z)}{2p'(z)^2 - p''(z)p(z)}, \quad (17)$$

$$B_4(z) = z - \frac{6p'(z)^2p(z) - 3p''(z)p(z)^2}{p'''(z)p(z)^2 + 6p'(z)^3 - 6p''(z)p'(z)p(z)}. \quad (18)$$

Widać, że B_2 to metoda Newtona, a B_3 to metoda Halleya.

4. Rodzina Iteracji Eulera-Schrödera

Początkowe elementy Rodziny Iteracji Eulera-Schrödera:

$$E_2(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad (19)$$

$$E_3(z) = E_2(z) + \left(\frac{p(z)}{p'(z)}\right)^2 \frac{p''(z)}{2p'(z)}, \quad (20)$$

$$E_4(z) = E_3(z) - \left(\frac{p(z)}{p'(z)}\right)^3 \left(\frac{p'''(z)}{6p'(z)} - \frac{p''(z)}{2p'^2(z)}\right), \quad (21)$$

$$E_5(z) = E_4(z) + \left(\frac{p(z)}{p'(z)}\right)^4 \left(\frac{p^{IV}(z)}{4!p'(z)} - \frac{5p''(z)p'''(z)}{12p'^2(z)} + \frac{5p''^3(z)}{8p'^3(z)}\right). \quad (22)$$

Widać, że E_2 to metoda Newtona.

5. Uogólnienia Metody Newtona

Oznaczmy przez G jeden z operatorów: N oznaczający standardową metodę Newtona, B_i dla $i = 2, 3, \dots$, lub E_i dla $i = 2, 3, \dots$ reprezentujących odpowiednio elementy Podstawowej Rodziny lub Rodziny Eulera-Schödera. Zastąpmy standardową iterację Picarda przez iteracje niestandardowe. Otrzymujemy uogólnienia metody Newtona:

- Metoda Newtona z iteracją Manna:

$$z_{n+1} = (1 - \alpha)z_n + \alpha G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją Ishikawy:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)z_n + \alpha G(v_n), \\ v_n = (1 - \beta)z_n + \beta G(z_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$ i $\beta \in [0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją Noora:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)z_n + \alpha G(v_n), \\ v_n = (1 - \beta)z_n + \beta G(w_n), \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma G(z_n), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$ i $\beta, \gamma \in [0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją Suantai:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)z_n + \alpha G(v_n) + \beta G(w_n), \\ v_n = (1 - a - b)z_n + aG(w_n) + bG(z_n), \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (26)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$, $\beta, \gamma, a, b \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \in (0, 1]$,
 $a + b \in (0, 1]$.

- Metoda Newtona z S-iteracją:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)G(z_n) + \alpha G(v_n), \\ v_n = (1 - \beta)z_n + \beta G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (27)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$ i $\beta \in [0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją SP:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)v_n + \alpha G(v_n), \\ v_n = (1 - \beta)w_n + \beta G(w_n), \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (28)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$ i $\beta, \gamma \in [0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją CR:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)v_n + \alpha G(v_n), \\ v_n = (1 - \beta)G(z_n) + \beta G(w_n), \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (29)$$

gdzie $\beta, \gamma \in [0, 1]$ i $\alpha \in (0, 1]$, gdyż jeśli $\alpha \neq 0$, to
 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha = \infty$.

- Metoda Newtona z iteracją Khana:

$$\begin{cases} z_{n+1} = G(v_n), \\ v_n = (1 - \alpha)z_n + \alpha G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (30)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją Karakayi:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)v_n + \alpha G(v_n) + \beta G(w_n), \\ v_n = (1 - a - b)w_n + aG(w_n) + bG(z_n), \\ w_n = (1 - \gamma)z_n + \gamma G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (31)$$

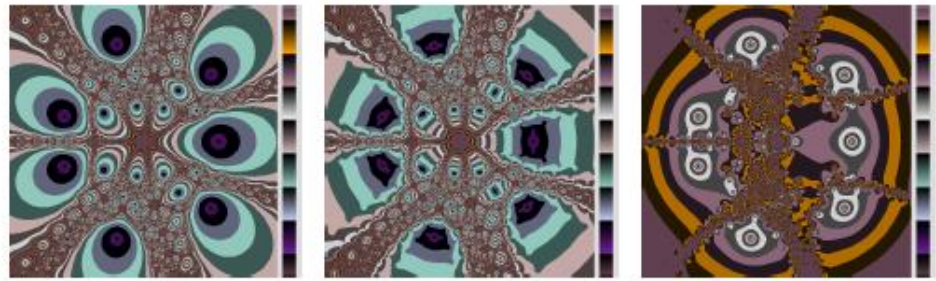
gdzie $\alpha \in (0, 1]$, $\beta, \gamma, a, b \in [0, 1]$ i $\alpha + \beta \in (0, 1]$,
 $a + b \in (0, 1]$.

- Metoda Newtona z iteracją Picard-S:

$$\begin{cases} z_{n+1} = G(v_n), \\ v_n = (1 - \alpha)G(z_n) + \alpha G(w_n), \\ w_n = (1 - \beta)z_n + \beta G(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (32)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$ i $\beta \in [0, 1]$.

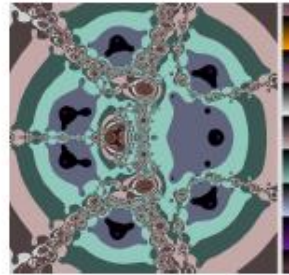
6. Eksperymenty



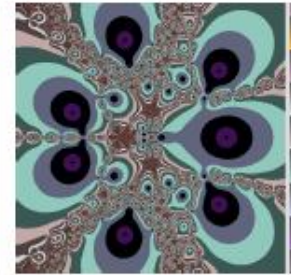
(a) Picard

(b) Mann

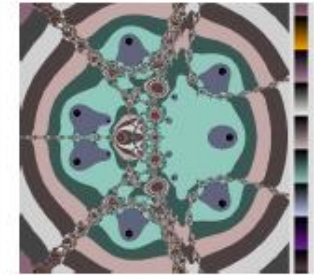
(c) Ishikawa



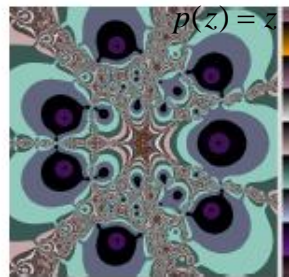
(d) Noor



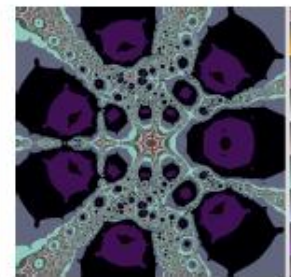
(e) Khan



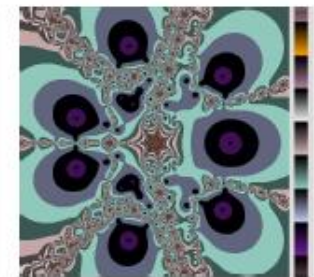
(f) SP



(g) Suantai



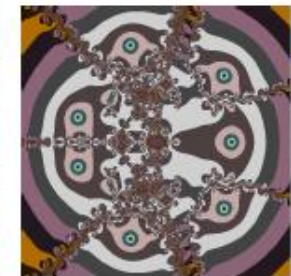
(h) Karakaya



(i) S



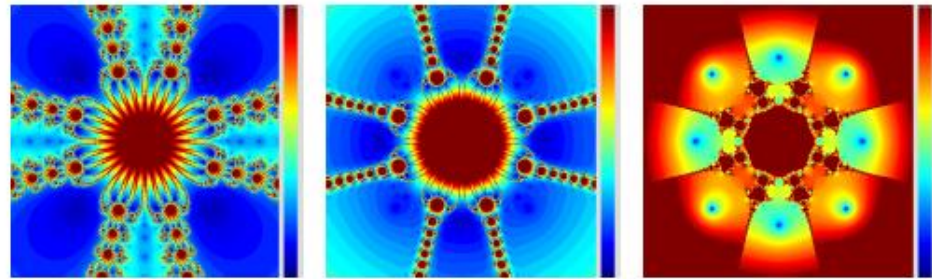
(j) Picard-S



(k) CR

Parametry rzeczywiste,
 Metoda N ,
 $p_1(z) = z^7 + z^2 - 1$,
 $M = 15$,
 $\epsilon = 0.001$,
 $A = [-1.5, 1.5]^2$.

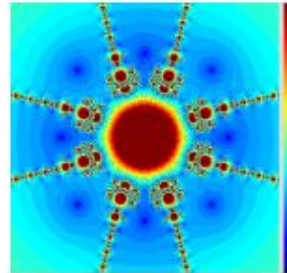
Parametry rzeczywiste,
 Metoda E_3 ,
 $p_2(z) = z^4 + 4$,
 $M = 40$,
 $\epsilon = 0.001$,
 $A = [-2, 2]^2$.



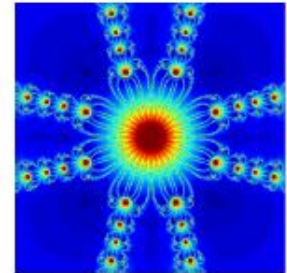
(a) Picard

(b) Mann

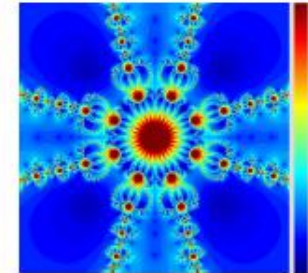
(c) Ishikawa



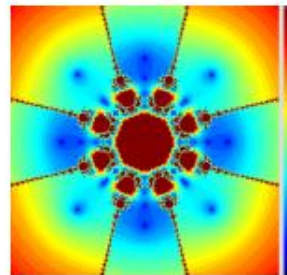
(d) Noor



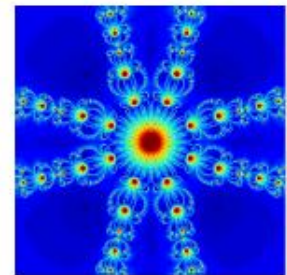
(e) Khan



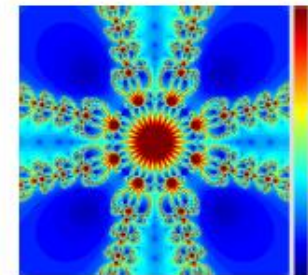
(f) SP



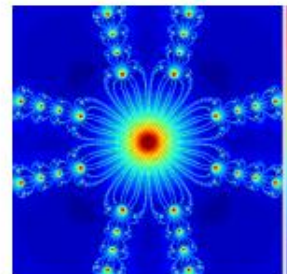
(g) Suantai



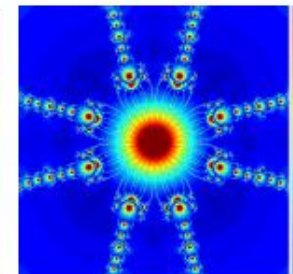
(h) Karakaya



(i) S



(j) Picard-S

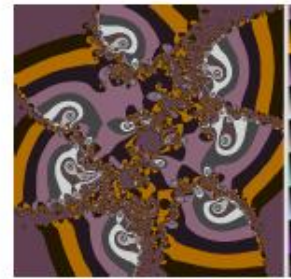


(k) CR

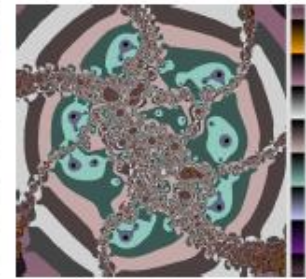
Parametry zespolone,
 Metoda N ,
 $p1(z) = z^7 + z^2 - 1$,
 $M = 15$,
 $\epsilon = 0.001$,
 $A = [-1.5, 1.5]^2$.



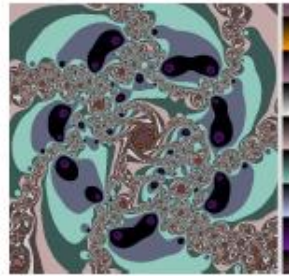
(a) Mann



(b) Ishikawa



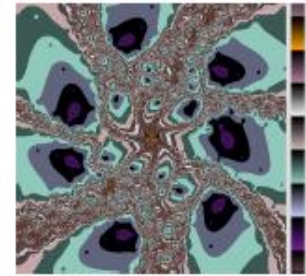
(c) Noor



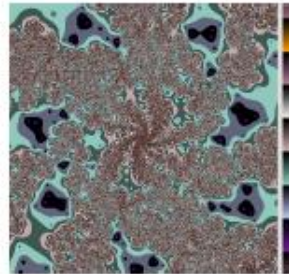
(d) Khan



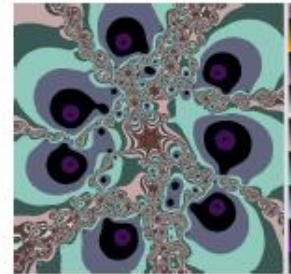
(e) SP



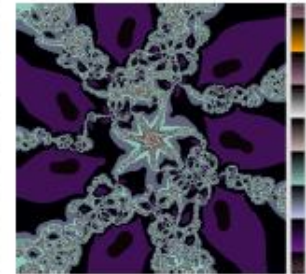
(f) Suantai



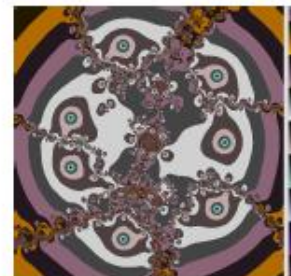
(g) Karakaya



(h) S



(i) Picard-S

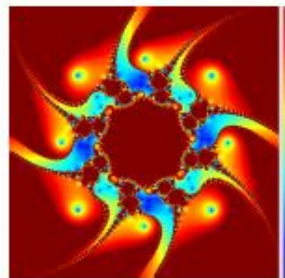


(j) CR

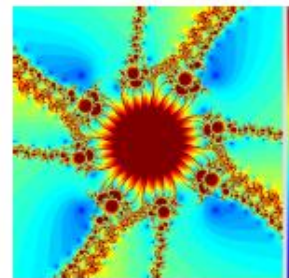
Parametry zespolone,
 Metoda E_3 ,
 $p_2(z) = z^4 + 4$,
 $M = 40$,
 $\epsilon = 0.001$,
 $A = [-2, 2]^2$.



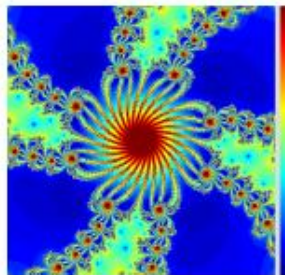
(a) Mann



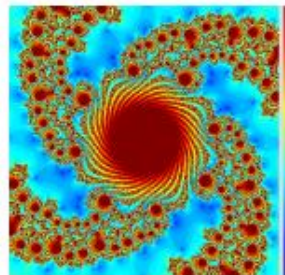
(b) Ishikawa



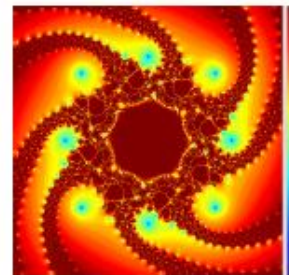
(c) Noor



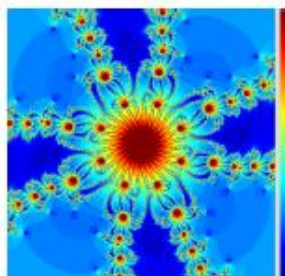
(d) Khan



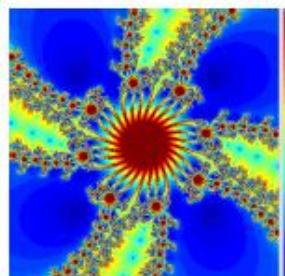
(e) SP



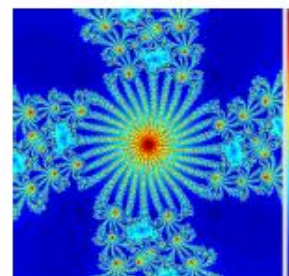
(f) Suantai



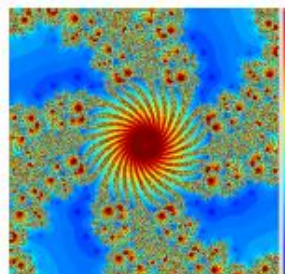
(g) Karakaya



(h) S

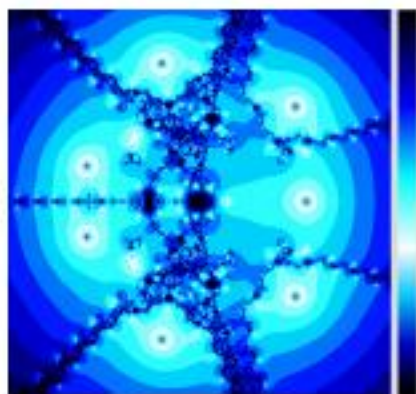


(i) Picard-S

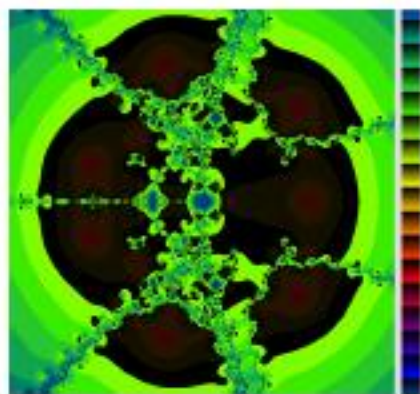


(j) CR

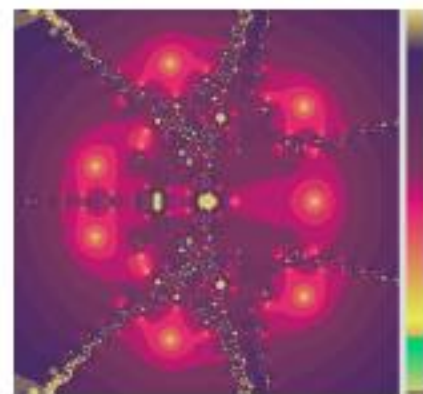
Różne mapy kolorów,
Metoda N ,
Iteracja CR,
Parametry rzeczywiste,
 $p_2(z) = z^4 + 4$,
 $M = 40$,



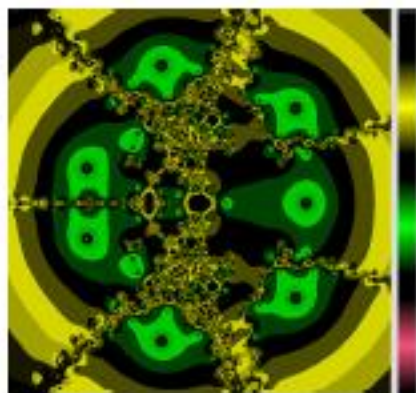
(a)



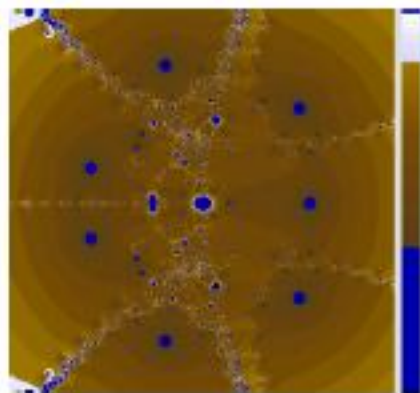
(b)



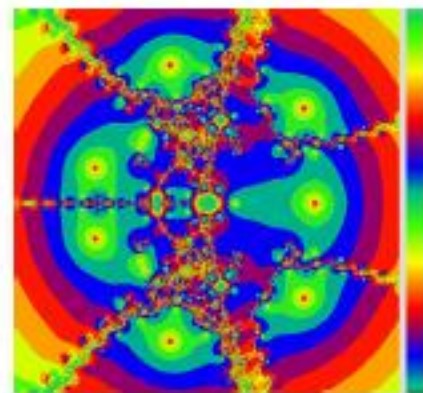
(c)



(d)



(e)



(f)

7. Uwagi końcowe

- Wykorzystanie niestandardowych iteracji zamiast iteracji Picarda uogólnia wielomianografię Kalantariego,
- Wielomianografy ilustrują szybkość zbieżności metod znajdowania miejsc zerowych wielomianów zespolonych,
- W podobny sposób można uogólnić fraktale zespolone (zbiory Juli, zbiór Mandelbrota), także biomorfy,
- Możliwe jest zastosowanie metod wielopunktowych do tworzenia wielomianografów.

Dziękuję za uwagę!