Konstrukcja przestrzeni metrycznej sztywnej i κ-superuniwersalnej

Wojciech Bielas

24 września 2014 r.

Przestrzeń Urysohna

W 1927 roku opublikowana została praca w której P. Urysohn skonstruował zupełną i ośrodkową przestrzeń metryczną $\mathbb{U}$ o następujących własnościach:

(i) każda ośrodkowa przestrzeń metryczna ma zanurzenie izometryczne w $\mathbb{U}$ (silna ω-uniwersalność),

(ii) jeśli A i B są podzbiorami skończonymi przestrzeni $\mathbb{U}$ oraz $f_0 : A \to B$ jest izometrią, to istnieje taka izometria $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, że $f \restriction A = f_0$, tzn. następujący diagram jest przemienny (ω-jednorodność):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U} \arrow[r, dashed, "f"] & \mathbb{U} \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_0"] & B \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Przestrzeń funkcji ciągłych

Przestrzeń $C([0,1])$ z metryką

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

jest silnie ω-uniwersalna (Banach–Mazur, 1932).
Przestrzeń ta nie jest jednak ω-jednorodna (Sierpiński 1945): dla funkcji stałych $f = 0$, $g = 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja $h \in C([0,1])$ taka, że $d(f,g) = d(f,h) = 1/2$; przyjmując $k = \mathrm{id}_{[0,1]}$ można pokazać, że $d(f,k) = 1$ oraz zbiór

$$\{h \in C([0,1]) : d(f,h) = d(k,h) = 1/2\}$$

jest mocy $\mathfrak{c}$.

Twierdzenie (Sierpiński, 1945)

Dla każdej liczby kardynalnej κ spełniającej warunek $\kappa = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$ istnieje przestrzeń metryczna κ-uniwersalna mocy κ.

ω-superuniwersalność

Jeśli przestrzeń metryczna X jest zupełna i ośrodkowa, to ma własność silnej ω-uniwersalności oraz ω-jednorodności wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek (ω-superuniwersalność):

(iii) jeśli Y jest przestrzenią metryczną skończoną, $Y_0 \subseteq Y$ oraz $f_0 : Y_0 \to \mathbb{U}$ jest zanurzeniem izometrycznym, to istnieje takie zanurzenie izometryczne $f : Y \to \mathbb{U}$, że $f \restriction Y_0 = f_0$, tzn. następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "f"] & X \\
Y_0 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Definicja (Hechler, 1973)

Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *κ-superuniwersalna*, gdy dla każdej przestrzeni metrycznej Y mocy mniejszej niż κ, każde zanurzenie izometryczne $f_0 : Y_0 \to X$, gdzie $Y_0 \subseteq Y$, ma przedłużenie do zanurzenia izometrycznego $f : Y \to X$.

Definicja

Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest *κ-jednorodna*, gdy dla każdego podzbioru $A \subseteq X$ mocy mniejszej niż κ oraz zanurzenia izometrycznego $f_0 : A \to X$, istnieje izometria $f : X \to X$ spełniająca warunek $f \restriction A = f_0$.

Twierdzenie (Hechler, 1973)

Dla każdej liczby kardynalnej regularnej $\kappa > \aleph_0$ istnieje przestrzeń κ-superuniwersalna mocy $\sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda$.

Twierdzenie Katětova

Twierdzenie (Katětov, 1986)

1. *Jeśli* $\kappa = \kappa^{<\kappa} > \aleph_0$ *jest liczbą kardynalną, to istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do izometrii) przestrzeń* κ*-superuniwersalna wagi* κ.
2. *Jeśli* κ *jest liczbą kardynalną oraz* $\aleph_0 \leqslant \kappa < \kappa^{<\kappa}$*, to nie istnieje przestrzeń metryczna* κ*-superuniwersalna wagi* κ.

Fakt

1. Jeśli $\kappa = \kappa^{<\kappa} > \aleph_0$ jest wagą przestrzeni metrycznej X, to $|X| = \kappa$.
2. Jeśli przestrzeń metryczna mocy κ jest κ-superuniwersalna, to jest κ-jednorodna.

Przyjmujemy $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^{\lambda} : \lambda < \kappa\}$.

W. Kubiś zasugerował istnienie przestrzeni κ-superuniwersalnych, które nie są κ-jednorodne.

Twierdzenie

Dla każdej liczby kardynalnej $\kappa \geqslant \aleph_0$ istnieje przestrzeń metryczna κ-superuniwersalna sztywna.

Charakter dyskretny punktu

Przestrzenią dyskretną nazwiemy przestrzeń metryczną której metryka przyjmuje wartości w zbiorze $\{0, 1\}$.

Niech Y będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Mówimy, że $x \in X$ jest *punktem środkowym podprzestrzeni* Y, gdy $d(x, y) = 1/2$ dla każdego $y \in Y$.
Jeśli ustalona jest liczba kardynalna κ oraz żaden podzbiór mocy κ podprzestrzeni dyskretnej Y nie ma punktu środkowego, to mówimy, że Y *dziedzicznie nie ma punktów środkowych*. Liczbę

$$\tau_\kappa(x, X) = \\ \sup\{|Y| : Y \subseteq X \text{ dziedzicznie nie ma p. środkowych}, x \in Y\}$$

nazwiemy *charakterem dyskretnym punktu* x (w przestrzeni X).

Charakter dyskretny punktu

Fakt

Jeśli $f : X \to Y$ jest izometrią, to $\tau_\kappa(x, X) = \tau_\kappa(f(x), Y)$.

Twierdzenie

Dla każdej liczby kardynalnej $\kappa \geqslant \aleph_0$ istnieje przestrzeń metryczna κ-superuniwersalna X_κ spełniająca warunek:

$$(*) \quad \textit{dla każdego } x, y \in X_\kappa, \ \textit{jeśli } x \neq y, \ \textit{to } \tau_\kappa(x, X_\kappa) \neq \tau_\kappa(y, X_\kappa).$$

Fakt

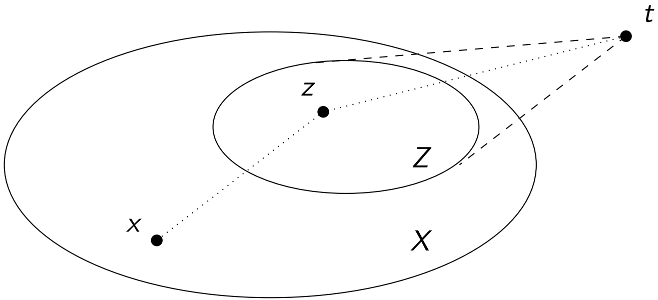
Jeśli przestrzeń metryczna nieskończona X spełnia warunek $(*)$, to $\aleph_{|X|} = |X|$.

Dołączanie punktów realizujących przedłużenia zanurzeń

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, d) oraz podzbiór $Z \subseteq X$, gdzie $|Z| < \kappa$. Jeśli $(Z \cup \{t\}, \sigma)$ jest przestrzenią metryczną, $t \notin X$ oraz $\sigma \restriction (Z \times Z) = d \restriction (Z \times Z)$, to przedłużenie $\rho : X \cup \{t\} \to \mathbb{R}$ metryk d oraz σ, dane wzorem

$$\rho(x, t) = \inf\{d(x, z) + \sigma(z, t) : z \in Z\},$$

jest pseudometryką.



Dołączanie punktów realizujących przedłużenia zanurzeń

Ustalmy przestrzeń metryczną (X, d), podprzestrzeń dyskretną $Y \subseteq X$, $t \notin X$ oraz podzbiór $Z \subseteq Y$, gdzie $|Z| < \kappa \leqslant |Y|$. Przypuśćmy, że σ jest taką metryką na zbiorze $Z \cup \{t\}$, że $\sigma \restriction (Z \times Z) = d \restriction (Z \times Z)$ oraz $\rho(y, t) = 1/2$ dla każdego $y \in Y$. Skoro $|Z| < |Y|$, to istnieje $y \in Y \setminus Z$. Wtedy

$$d(y, z) + \sigma(z, t) \geqslant 1$$

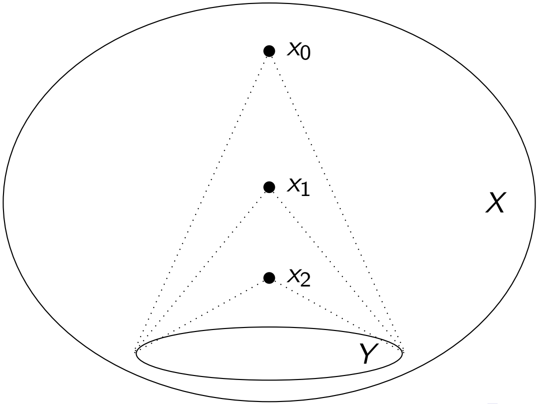
dla każdego $z \in Z$, zatem $\rho(y, t) \geqslant 1$; sprzeczność.

Dołączanie punktów realizujących przedłużenia zanurzeń

Załóżmy, że Y jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) oraz istnieje taki ciąg Cauchy'ego $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, że

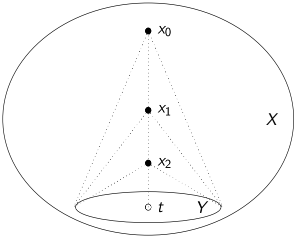
$$d(x_n, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \geqslant 1$ oraz $y \in Y$.



Dołączanie punktów realizujących przedłużenia zanurzeń

Skoro $d(x_n, y) > \frac{1}{2}$ dla każdego $n < \omega$ oraz $y \in Y$, to żaden z punktów x_n nie jest punktem środkowym jakiegokolwiek podzbioru podprzestrzeni Y.



Jeśli $(\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{t\}, \sigma)$ jest przestrzenią metryczną w której $t \notin X$, $\sigma \restriction (Z \times Z) = d \restriction (Z \times Z)$ oraz $t = \lim_{n\to\infty} x_n$, to

$$\rho(y, t) \leqslant d(y, x_n) + \sigma(x_n, t)$$

dla każdego $n \geqslant 1$ oraz $y \in Y$, a więc $\rho(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$ dla każdego $y \in Y$.

Słabe punkty środkowe

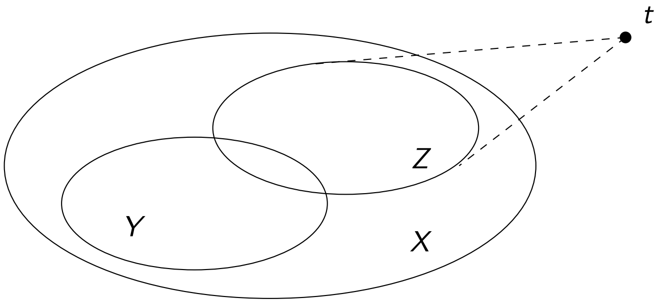
Ustalmy przestrzeń metryczną (X, d). Powiemy, że $x \in X$ jest *słabym punktem środkowym* podprzestrzeni dyskretnej $Y \subseteq X$, gdy $d(x, y) = d(x, y') < 1$ dla każdego $y, y' \in Y$.

Słabe punkty środkowe

Ustalmy takie $Y, Z \subseteq X$, że $|Z| < \kappa \leqslant |Y|$. Załóżmy, że σ jest taką metryką w zbiorze $Z \cup \{t\}$, że $\sigma \restriction (Z \times Z) = d \restriction (Z \times Z)$ oraz t jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni Y w przestrzeni $(X \cup \{t\}, \rho)$, gdzie

$$\rho(x,t) = \inf\{d(x,z) + \sigma(z,t) : z \in Z\}$$

dla każdego $x \in X$.



Skoro $\rho(y,t) < 1$ dla każdego $y \in Y$, to określona jest funkcja $Y \ni y \mapsto (z_{y,n}, d(y, z_{y,n}))_{n\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}(Z \times \mathbb{R})$ spełniająca warunek:

$$\lim_{n\to\infty} (d(y, z_{y,n}) + \sigma(z_{y,n}, t)) < 1.$$

Możemy założyć, że $\kappa = (\lambda^{\aleph_0})^+$. Skoro $|Z| < \kappa$, to $|Z| \leqslant \lambda^{\aleph_0}$, a więc $|{}^{\mathbb{N}}(Z \times \mathbb{R})| = |Z \times \mathbb{R}|^{\aleph_0} \leqslant \lambda^{\aleph_0} < \kappa$. Skoro $\kappa = \operatorname{cf} \kappa$, to istnieje taki podzbiór $Y_0 \subseteq Y$, $|Y_0| = \kappa$, że

$$(z_{y,n}, d(y, z_{y,n}))_{n\in\mathbb{N}} = (z_{y',n}, d(y', z_{y',n}))_{n\in\mathbb{N}} \text{ dla każdego } y, y' \in Y_0.$$

Ustalmy $y \in Y_0$ oraz $0 < \varepsilon < 1 - \rho(y,t)$. Wtedy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$d(y, z_{y,n}) + \sigma(z_{y,n}, t) < \rho(y,t) + \varepsilon.$$

Stąd $z_{y,n} \in X$ jest słabym punktem środkowym podprzestrzeni Y_0.

Amalgamacja przestrzeni metrycznych

Twierdzenie

Załóżmy, że $s_0 \in S$ *oraz* $\{(X_s, d_s) : s \in S\}$ *jest taką rodziną przestrzeni metrycznych, że dla każdego* $s, t \in S$*:*

(i) $X_{s_0} \cap X_s \neq \emptyset$, $X_s \cap X_t \subseteq X_{s_0}$ *o ile* $s \neq t$,

(ii) $d_{s_0} \restriction (X_{s_0} \cap X_s) = d_s \restriction (X_{s_0} \cap X_s)$.

Wtedy istnieje taka przestrzeń metryczna (Y, ρ), *że*

(iii) X_{s_0} *jest podprzestrzenią* Y *oraz* $Y \subseteq \bigcup_{s \in S} X_s$,

(iv) *dla każdego* $s \in S$ *istnieje takie zanurzenie* $i_s : X_s \to Y$, *że* $i_s \restriction (X_{s_0} \cap X_s) = \mathrm{id}_{X_{s_0} \cap X_s}$,

(v) *dla każdego* $s \neq t$, *jeśli* $x \in i_s[X_s]$, $y \in i_t[X_t]$, $z \in X_{s_0}$, *to*

$$\rho(x, y) = \inf\{\rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) : a \in X_{s_0} \cap X_s, b \in X_{s_0} \cap X_t\},$$

$$\rho(x, z) = \inf\{\rho(x, a) + \rho(a, z) : a \in X_{s_0} \cap X_s\}.$$

- S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa 1932, str. 187.
- W. Bielas, *An example of a rigid κ-superuniversal metric space*, `arXiv:1407.3767 [math.GN]`, preprint.
- S. H. Hechler, *Large superuniversal metric spaces*, Israel J. Math. 14(2) 1973, 115–148.
- M. Katětov, *On universal metric spaces*, w: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI, Proc. Sixth Prague Topological Symposium 1986, Z. Frolík (red.), Berlin 1988.
- W. Sierpiński, *Sur un espace métrique separable universel*, Fund. Math. 33 (1945), 115–122.
- W. Sierpiński, *Sur les espaces métriques universales*, Fund. Math.33 (1945), 123–136.
- P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. 51 (1927), 43–64.