Letnia Szkoła Instytutu Matematyki

Podlesice, 22-26 wrzesień 2014

O odwzorowaniach delta-wypukłych i pokrewnych

Andrzej Olbryś

Wprowadzenie

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0, 1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

Wprowadzenie

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

$$\bigwedge_{x,y \in D} f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Wprowadzenie

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

$$\bigwedge_{x,y \in D} f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Jeżeli $t = \frac{1}{2}$ to mówimy, że f jest wypukła w sensie Jensena.

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

$$\bigwedge_{x,y \in D} f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Jeżeli $t = \frac{1}{2}$ to mówimy, że f jest wypukła w sensie Jensena. Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla wszelkich $t \in [0,1]$ wówczas mówimy, że f jest funkcją wypukłą.

Wprowadzenie

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

$$\bigwedge_{x,y \in D} f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Jeżeli $t = \frac{1}{2}$ to mówimy, że f jest wypukła w sensie Jensena. Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla wszelkich $t \in [0,1]$ wówczas mówimy, że f jest funkcją wypukłą.

W 1954 roku E.M. Wright wprowadził nowy rodzaj wypukłości. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Wrighta, jeżeli

Wprowadzenie

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $D \subset X$ będzie zbiorem wypukłym. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest t-wypukła (gdzie $t \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą), jeśli

$$\bigwedge_{x,y \in D} f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Jeżeli $t = \frac{1}{2}$ to mówimy, że f jest wypukła w sensie Jensena. Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona dla wszelkich $t \in [0,1]$ wówczas mówimy, że f jest funkcją wypukłą.

W 1954 roku E.M. Wright wprowadził nowy rodzaj wypukłości. Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Wrighta, jeżeli

$$\bigwedge_{x,y \in D} \bigwedge_{\lambda \in [0,1]} f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(x) + f(y).$$

Każda funkcja wypukła jest wypukła w sensie Wrighta, ponadto, każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena. Z drugiej strony, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, tzn.

Każda funkcja wypukła jest wypukła w sensie Wrighta, ponadto, każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena. Z drugiej strony, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, tzn.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in X;$$

Każda funkcja wypukła jest wypukła w sensie Wrighta, ponadto, każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena. Z drugiej strony, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, tzn.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in X;$$

to f jest funkcją wypukłą w sensie Wrighta.

Każda funkcja wypukła jest wypukła w sensie Wrighta, ponadto, każda funkcja wypukła w sensie Wrighta jest wypukła w sensie Jensena. Z drugiej strony, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją addytywną, tzn.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in X;$$

to f jest funkcją wypukłą w sensie Wrighta.

Twierdzenie 1. [Kominek, Ng]

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, $D \subset X$ zbiorem wypukłym i algebraicznie otwartym.

Twierdzenie 1. [Kominek, Ng]

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, $D \subset X$ zbiorem wypukłym i algebraicznie otwartym. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Wrighta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: wypukła funkcja $F : D \to \mathbb{R}$ oraz funkcja addytywna $A : X \to \mathbb{R}$ takie, że

Twierdzenie 1. [Kominek, Ng]

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, $D \subset X$ zbiorem wypukłym i algebraicznie otwartym. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Wrighta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: wypukła funkcja $F : D \to \mathbb{R}$ oraz funkcja addytywna $A : X \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) = F(x) + A(x), \quad x \in D.$$

Twierdzenie 1. [Kominek, Ng]

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, $D \subset X$ zbiorem wypukłym i algebraicznie otwartym. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Wrighta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: wypukła funkcja $F : D \to \mathbb{R}$ oraz funkcja addytywna $A : X \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) = F(x) + A(x), \quad x \in D.$$

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0, 1)$ ustaloną liczbą.

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

Definicja 1.

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

Definicja 1.

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe jeśli istnieje ciągła i wypukła funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że funkcja

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

Definicja 1.

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe jeśli istnieje ciągła i wypukła funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że funkcja

$$f + y^* \circ F$$

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

Definicja 1.

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe jeśli istnieje ciągła i wypukła funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że funkcja

$$f + y^* \circ F$$

jest wypukła, dla dowolnego funkcjonału $y^* \in Y^*$ takiego, że $\|y^*\| = 1$.

W dalszej części niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, D będzie niepustym, wypukłym podzbiorem X, oraz $t \in (0,1)$ ustaloną liczbą.

W 1989 L. Veselý oraz L. Zajiček wprowadzili następującą definicję odwzorowań delta-wypukłych

Definicja 1.

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe jeśli istnieje ciągła i wypukła funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że funkcja

$$f + y^* \circ F$$

jest wypukła, dla dowolnego funkcjonału $y^* \in Y^*$ takiego, że $\|y^*\| = 1$. Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to mówimy, że F jest odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją f.

Obserwacja 1.

Niech $F : D \to Y, \ f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

Obserwacja 1.

Niech $F : D \to Y,\ f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $y^\star \circ F + f$ jest funkcją wypukłą, dla dowolnego $y^\star \in Y^\star, \|y^\star\| = 1$;

Obserwacja 1.

Niech $F : D \to Y,\ f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $y^\star \circ F + f$ jest funkcją wypukłą, dla dowolnego $y^\star \in Y^\star, \|y^\star\| = 1$;

(ii)

$$\begin{aligned}\|\lambda F(x) + & (1-\lambda)F(y) - F(\lambda x + (1-\lambda)y)\| \leq \\ & \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)\end{aligned}$$

dla wszelkich $x, y \in D,\ \lambda \in [0,1]$.

Obserwacja 1.

Niech $F : D \to Y,\ f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $y^\star \circ F + f$ jest funkcją wypukłą, dla dowolnego $y^\star \in Y^\star, \|y^\star\| = 1$;

(ii)

$$\begin{aligned}\|\lambda F(x)+ &\ (1-\lambda)F(y) - F(\lambda x + (1-\lambda)y)\| \leq \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)\end{aligned}$$

dla wszelkich $x, y \in D,\ \lambda \in [0,1]$.

(iii)

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(x_i) - F(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$$

dla wszelkich $x_1, ..., x_n \in D,\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1],\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Okazuje się, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z ciągłą kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy gdy, następująca nierówność

Okazuje się, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z ciągłą kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy gdy, następująca nierówność

$$\left\| F\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{F(x)+F(y)}{2} \right\| \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right); \tag{1}$$

Okazuje się, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z ciągłą kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy gdy, następująca nierówność

$$\left\| F\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{F(x)+F(y)}{2} \right\| \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right); \tag{1}$$

jest spełniona dla wszelkich $x, y \in D$.

Twierdzenie 2. [R.Ger]

Niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem otwartym i wypukłym.

Twierdzenie 2. [R.Ger]

Niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem otwartym i wypukłym. Załóżmy, że odwzorowania $F : D \to Y$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1).

Twierdzenie 2. [R.Ger]

Niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem otwartym i wypukłym. Załóżmy, że odwzorowania $F : D \to Y$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1). Wówczas, jeśli funkcja

$$D \ni x \longrightarrow \|F(x)\| + f(x),$$

Twierdzenie 2. [R.Ger]

Niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem otwartym i wypukłym. Załóżmy, że odwzorowania $F : D \to Y$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1). Wówczas, jeśli funkcja

$$D \ni x \longrightarrow \|F(x)\| + f(x),$$

jest ograniczona z góry na zbiorze $T \subset D$, takim, że $\mathbb{Q}$-otoczka wypukła $conv_{\mathbb{Q}}(T)$ tworzy zbiór drugiej kategorii o własności Baira,

Twierdzenie 2. [R.Ger]

Niech $(X, \|\cdot\|)$ oraz $(Y, \|\cdot\|)$ będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, $D \subset X$ zbiorem otwartym i wypukłym. Załóżmy, że odwzorowania $F : D \to Y$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność (1). Wówczas, jeśli funkcja

$$D \ni x \longrightarrow \|F(x)\| + f(x),$$

jest ograniczona z góry na zbiorze $T \subset D$, takim, że $\mathbb{Q}$-otoczka wypukła $conv_{\mathbb{Q}}(T)$ tworzy zbiór drugiej kategorii o własności Baira, wówczas F jest lokalnie Lipschitzowska, w szczególności, F jest odwzorowaniem delta-wypukłym, z kontrolną funkcją f.

Twierdzenie 3.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas

Twierdzenie 3.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Funkcja $h : D \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) := \|F(x)\| + f(x),$$

jest wypukła;

Twierdzenie 3.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Funkcja $h : D \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) := \|F(x)\| + f(x),$$

jest wypukła;

(ii) F jest ciągła po promieniach w dowolnym punkcie zbioru D, tzn.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|F(x + \lambda y) - F(x)\| = 0, \quad x \in D, y \in X.$$

Twierdzenie 3.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Funkcja $h : D \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) := \|F(x)\| + f(x),$$

jest wypukła;

(ii) F jest ciągła po promieniach w dowolnym punkcie zbioru D, tzn.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|F(x + \lambda y) - F(x)\| = 0, \quad x \in D, y \in X.$$

Wprowadźmy następujące definicje

Wprowadźmy następujące definicje

Definicja 2.

Niech $t \in (0, 1)$ będzie ustaloną liczbą.

Wprowadźmy następujące definicje

Definicja 2.

Niech $t \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Powiemy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$

Wprowadźmy następujące definicje

Definicja 2.

Niech $t \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Powiemy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$

$$\begin{aligned} \|tF(x) + (1-t)F(y) & - F(tx + (1-t)y)\| \leq \\ & \leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y), \end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące definicje

Definicja 2.

Niech $t \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Powiemy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$

$$\|tF(x) + (1-t)F(y) \quad -F(tx + (1-t)y)\| \leq$$

$$\leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y),$$

Jeśli powyższa nierówność zachodzi dla $t = \frac{1}{2}$, to mówimy, że F jest funkcją delta-wypukłą w sensie Jensena.

Definicja 3.

Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe w sensie Wrighta z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$ oraz $t \in [0, 1]$ spełniona jest następująca nierówność

Definicja 3.

Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe w sensie Wrighta z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$ oraz $t \in [0, 1]$ spełniona jest następująca nierówność

$$\begin{aligned} \|F(x) \quad &+ F(y) - F(tx + (1-t)y) - F((1-t)x + ty)\| \leq \\ &\leq f(x) + f(y) - f(tx + (1-t)y) - f((1-t)x + ty). \end{aligned}$$

Definicja 3.

Mówimy, że odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe w sensie Wrighta z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli dla wszelkich $x, y \in D$ oraz $t \in [0, 1]$ spełniona jest następująca nierówność

$$\begin{aligned} \|F(x) &+ F(y) - F(tx + (1-t)y) - F((1-t)x + ty)\| \leq \\ &\leq f(x) + f(y) - f(tx + (1-t)y) - f((1-t)x + ty). \end{aligned}$$

Oczywiście każde odwzorowanie delta-wypukłe jest delta-wypukłe w sensie Wrighta, ponadto każde odwzorowanie delta-wypukłe w sensie Wrighta jest delta-wypukłe w sensie Jensena.

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane odwzorowanie było delta t-wypukłe i delta-wypukłe w sensie Wrighta

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane odwzorowanie było delta t-wypukłe i delta-wypukłe w sensie Wrighta

Twierdzenie 4.

Niech $F : D \to Y$, $f : D \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane odwzorowanie było delta t-wypukłe i delta-wypukłe w sensie Wrighta

Twierdzenie 4.

Niech $F : D \to Y$, $f : D \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

(i) F jest delta t-wypukłe (delta-wypukłe w sensie Wrighta) z kontrolną funkcją f ;

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane odwzorowanie było delta t-wypukłe i delta-wypukłe w sensie Wrighta

Twierdzenie 4.

Niech $F : D \to Y$, $f : D \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

(i) F jest delta t-wypukłe (delta-wypukłe w sensie Wrighta) z kontrolną funkcją f ;

(ii) dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$, funkcja $y^* \circ F + f$ jest t-wypukła (wypukła w sensie Wrighta);

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne i wystarczające na to, aby dane odwzorowanie było delta t-wypukłe i delta-wypukłe w sensie Wrighta

Twierdzenie 4.

Niech $F : D \to Y$, $f : D \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne :

(i) F jest delta t-wypukłe (delta-wypukłe w sensie Wrighta) z kontrolną funkcją f ;

(ii) dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$, funkcja $y^* \circ F + f$ jest t-wypukła (wypukła w sensie Wrighta);

(iii) dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$, funkcja $y^* \circ F - f$ jest t-wklęsła (wklęsła w sensie Wrighta).

Korzystając z następującej tożsamości Daróczye'go-Pálesa:

Korzystając z następującej tożsamości Daróczye'go-Pálesa:

$$(1-t)[tx+(1-t)\tfrac{x+y}{2}]+t[t\tfrac{x+y}{2}+(1-t)y]=\tfrac{x+y}{2}.$$

Korzystając z następującej tożsamości Daróczye'go-Pálesa:

$$(1-t)[tx+(1-t)\tfrac{x+y}{2}]+t[t\tfrac{x+y}{2}+(1-t)y]=\tfrac{x+y}{2}.$$

łatwo dowieść następującego twierdzenia

Korzystając z następującej tożsamości Daróczye'go-Pálesa:

$$(1-t)[tx+(1-t)\tfrac{x+y}{2}]+t[t\tfrac{x+y}{2}+(1-t)y]=\tfrac{x+y}{2}.$$

łatwo dowieść następującego twierdzenia

Twierdzenie 5.

Jeśli odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją f, to jest delta-wypukłe w sensie Jensena z tą samą kontrolną funkcją f.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Twierdzenie 6.

Niech $F : D \to Y$ będzie danym odwzorowaniem. Wówczas F jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Twierdzenie 6.

Niech $F : D \to Y$ będzie danym odwzorowaniem. Wówczas F jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in D$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Twierdzenie 6.

Niech $F : D \to Y$ będzie danym odwzorowaniem. Wówczas F jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in D$ istnieją odwzorowania afiniczne $A_y : D \to Y$, $a_y : D \to \mathbb{R}$ takie, że

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Twierdzenie 6.

Niech $F : D \to Y$ będzie danym odwzorowaniem. Wówczas F jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in D$ istnieją odwzorowania afiniczne $A_y : D \to Y$, $a_y : D \to \mathbb{R}$ takie, że

$$A_y(y) = F(y), \qquad a_y(y) = f(y),$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie o podpieraniu dla odwzorowań delta t-wypukłych

Twierdzenie 6.

Niech $F : D \to Y$ będzie danym odwzorowaniem. Wówczas F jest delta t-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in D$ istnieją odwzorowania afiniczne $A_y : D \to Y$, $a_y : D \to \mathbb{R}$ takie, że

$$A_y(y) = F(y), \qquad a_y(y) = f(y),$$

ponadto,

$$\bigwedge_{x \in D} ||F(x) - A_y(x)|| \leq f(x) - a_y(x).$$

Twierdzenie 7.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ tzn. spełnia dla wszelkich $x, y \in D$ oraz $\lambda \in [0,1]$ nierówność

$$\begin{aligned} \|\lambda F(x)+ & (1-\lambda)F(y) - F(\lambda x + (1-\lambda)y)\| \leq \\ & \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \end{aligned}$$

wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego punktu $y \in D$ istnieją odwzorowania afiniczne: $A_y : D \to Y$ oraz $a_y : D \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\bigwedge_{x \in D} \|F(x) - A_y(x)\| \leq f(x) - a_y(x),$$

ponadto,

$$A_y(y) = F(y), \quad a_y(y) = f(y).$$

Twierdzenie 8.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe w sensie Wrighta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: odwzorowanie delta-wypukłe $G : D \to Y$ oraz operator addytywny $A : X \to Y$ takie, że

Twierdzenie 8.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe w sensie Wrighta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: odwzorowanie delta-wypukłe $G : D \to Y$ oraz operator addytywny $A : X \to Y$ takie, że

$$F(x) = G(x) + A(x), \qquad x \in D.$$

Rozpatrzmy przestrzeń liniową

$$\overline{Y} := Y \times \mathbb{R},$$

z dodawaniem i mnożeniem przez skalary po współrzędnych

Rozpatrzmy przestrzeń liniową

$$\overline{Y} := Y \times \mathbb{R},$$

z dodawaniem i mnożeniem przez skalary po współrzędnych

$$(A, a) + (B, b) = (A + B, a + b), \quad \text{oraz}, \quad \alpha(A, a) = (\alpha A, \alpha a),$$

dla wszelkich $(A, a), (B, b) \in \overline{Y}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rozpatrzmy przestrzeń liniową

$$\overline{Y} := Y \times \mathbb{R},$$

z dodawaniem i mnożeniem przez skalary po współrzędnych

$$(A, a) + (B, b) = (A + B, a + b), \quad \text{oraz}, \quad \alpha(A, a) = (\alpha A, \alpha a),$$

dla wszelkich $(A, a), (B, b) \in \overline{Y}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para $(\overline{Y}, \| \cdot \|_c)$ jest przestrzenią Banacha z normą daną wzorem

$$\|(A, a)\|_c := \sqrt{\|A\|^2 + a^2}.$$

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$ tzn.

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$ tzn.

(i) $(A, a) \preceq (B, b)$ implikuje $(A + C, a + c) \preceq (B + C, b + c)$;

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$ tzn.

(i) $(A, a) \preceq (B, b)$ implikuje $(A + C, a + c) \preceq (B + C, b + c)$;

(ii) $(\alpha A, \alpha a) \preceq (\alpha B, \alpha b)$,

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$ tzn.

(i) $(A, a) \preceq (B, b)$ implikuje $(A + C, a + c) \preceq (B + C, b + c)$;

(ii) $(\alpha A, \alpha a) \preceq (\alpha B, \alpha b)$,

dla wszelkich $(A, a),\ (B, b),\ (C, c) \in \overline{Y},\ \alpha > 0$.

Rozpatrzmy przestrzeń $\overline{Y}$ z porządkiem Bishopa-Phelpsa

$$(A, a) \preceq (B, b) \Leftrightarrow \|A - B\| \leq b - a.$$

Porządek ten jest zgodny ze strukturą liniową przestrzeni $\overline{Y}$ tzn.

(i) $(A, a) \preceq (B, b)$ implikuje $(A + C, a + c) \preceq (B + C, b + c)$;

(ii) $(\alpha A, \alpha a) \preceq (\alpha B, \alpha b)$,

dla wszelkich $(A, a), \ (B, b), \ (C, c) \in \overline{Y}, \ \alpha > 0$.

Wniosek 1.

Para $(\overline{Y}, \preceq)$ tworzy uporządkowaną przestrzeń wektorową.

Dla dowolnego odwzorowania $F : D \to Y$ oraz funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ wzorem

Dla dowolnego odwzorowania $F : D \to Y$ oraz funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \qquad x \in D. \tag{2}$$

Zauważmy, że definicję delta-wypukłości możemy przepisać następująco: F

Dla dowolnego odwzorowania $F : D \to Y$ oraz funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ wzorem

$$(2) \qquad \overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \qquad x \in D.$$

Zauważmy, że definicję delta-wypukłości możemy przepisać następująco: F

Definicja 4.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli

Dla dowolnego odwzorowania $F : D \to Y$ oraz funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \qquad x \in D. \tag{2}$$

Zauważmy, że definicję delta-wypukłości możemy przepisać następująco: F

Definicja 4.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli

$$\overline{F}(\lambda x + (1-\lambda)y) \preceq \lambda \overline{F}(x) + (1-\lambda)\overline{F}(y),$$

dla wszelkich $x, y \in D$, oraz $\lambda \in [0,1]$, gdzie $\overline{F}$ jest dane wzorem (2).

Dla dowolnego odwzorowania $F : D \to Y$ oraz funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \qquad x \in D. \tag{2}$$

Zauważmy, że definicję delta-wypukłości możemy przepisać następująco: F

Definicja 4.

Odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$, jeśli

$$\overline{F}(\lambda x + (1-\lambda)y) \preceq \lambda \overline{F}(x) + (1-\lambda)\overline{F}(y),$$

dla wszelkich $x, y \in D$, oraz $\lambda \in [0,1]$, gdzie $\overline{F}$ jest dane wzorem (2).

Twierdzenie 9.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ oraz niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie dane wzorem

Twierdzenie 9.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ oraz niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie dane wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in D.$$

Twierdzenie 9.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ oraz niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie dane wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in D.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \overline{Y}$ zbiór

Twierdzenie 9.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ oraz niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie dane wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in D.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \overline{Y}$ zbiór

$$A_\alpha := \{x \in D : \overline{F}(x) \preceq \alpha\},$$

Twierdzenie 9.

Niech $F : D \to Y$ będzie odwzorowaniem delta-wypukłym z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ oraz niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie dane wzorem

$$\overline{F}(x) := (F(x), f(x)), \quad x \in D.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \overline{Y}$ zbiór

$$A_\alpha := \{x \in D : \overline{F}(x) \preceq \alpha\},$$

jest wypukły.

Twierdzenie 10.

Niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie określone tak jak w poprzednim twierdzeniu. Wówczas odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

Twierdzenie 10.

Niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie określone tak jak w poprzednim twierdzeniu. Wówczas odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$epi_{\preceq}(\overline{F}) := \{(x, y) \in D \times \overline{Y} : \overline{F}(x) \preceq y\}$$

Twierdzenie 10.

Niech odwzorowanie $\overline{F} : D \to \overline{Y}$ będzie określone tak jak w poprzednim twierdzeniu. Wówczas odwzorowanie $F : D \to Y$ jest delta-wypukłe z kontrolną funkcją $f : D \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$epi_{\preceq}(\overline{F}) := \{(x, y) \in D \times \overline{Y} : \overline{F}(x) \preceq y\}$$

jest wypukły.

References

G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, vol 25 Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1967),

J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (3) (1936) 396–414,

Z. Daróczy, Zs. Páles, *Convexity with given infinite weight sequences*, Stochastica, 11 (1987), No. 1, 5-12;

R. Ger, *Convex transformations with Banach lattice range*, Stochastica 11.1 (1987): 13-23,

R. Ger, *Stability aspects of delta-convexity*, In: Stability of Hyers-Ulam type, Hardonic Press, Palm Harbor (1994), 99-109,

L. H. Hsu, R. G. Kuller, *Convexity of vector valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 46, 363-366,

Z. Kominek, *On additive and convex functionals*, Radovi Mat, 3 (1987), 267-279;

- C. T. Ng, *Functions generating Schur-convex sums*, General Inequalities 5 (Oberwolach, 1986);
- L. Veselý, L. Zajiček, *Delta-convex mappings between Banach spaces and applications*, Dissertationes Math. , Polish Scientific Publishers (289), Warszawa, 1989 .