Wektorowe funkcje arytmetyczne a operatory quasi-liniowe

Tomasz Kochanek

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
Katowice, Polska

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki UŚ

Wisła
20–23 września, 2010

Plan referatu

I. Podstawowe informacje o przestrzeniach quasi-unormowanych

Plan referatu

I. Podstawowe informacje o przestrzeniach quasi-unormowanych

II. Problem trzech przestrzeni (ang. *three space problem*)

Plan referatu

I. Podstawowe informacje o przestrzeniach quasi-unormowanych

II. Problem trzech przestrzeni (ang. *three space problem*)

III. Pojęcie rozszczepialności przestrzeni i jego związek z operatorami quasi-liniowymi

Plan referatu

I. Podstawowe informacje o przestrzeniach quasi-unormowanych

II. Problem trzech przestrzeni (ang. *three space problem*)

III. Pojęcie rozszczepialności przestrzeni i jego związek z operatorami quasi-liniowymi

IV. Pojęcie $\mathcal{K}$-przestrzeni

Plan referatu

I. Podstawowe informacje o przestrzeniach quasi-unormowanych
II. Problem trzech przestrzeni (ang. *three space problem*)
III. Pojęcie rozszczepialności przestrzeni i jego związek z operatorami quasi-liniowymi
IV. Pojęcie $\mathcal{K}$-przestrzeni
V. Twierdzenia o stabilności dla arytmetycznych funkcji addytywnych

Definicja

Jeżeli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to funkcję $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazywamy *quasi-normą*, jeżeli

(i) $\|x\| > 0$ dla $x \in X$, $x \neq 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$;

(iii) $\|x + y\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|)$ dla $x, y \in X$,

gdzie $c \geqslant 1$ jest pewną stałą.

Definicja

Jeżeli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to funkcję $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazywamy *quasi-normą*, jeżeli

(i) $\|x\| > 0$ dla $x \in X$, $x \neq 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$;

(iii) $\|x + y\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|)$ dla $x, y \in X$,

gdzie $c \geqslant 1$ jest pewną stałą. Najmniejszą możliwą jej wartość nazywamy *modułem wklęsłości* przestrzeni X.

Definicja

Jeżeli X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, to funkcję $\|\cdot\| \colon X \to [0, \infty)$ nazywamy *quasi-normą*, jeżeli

(i) $\|x\| > 0$ dla $x \in X$, $x \neq 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ dla $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$;

(iii) $\|x + y\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|)$ dla $x, y \in X$,

gdzie $c \geqslant 1$ jest pewną stałą. Najmniejszą możliwą jej wartość nazywamy *modułem wklęsłości* przestrzeni X.

Każda przestrzeń quasi-unormowana jest lokalnie ograniczoną przestrzenią liniowo-topologiczną, dla której bazą otoczeń zera jest $\{\varepsilon U : \varepsilon > 0\}$, gdzie U jest kulą jednostkową. Na odwrót, każda lokalnie ograniczona przestrzeń liniowo-topologiczna dopuszcza quasi-normę.

Twierdzenie (Aoki, 1942 & Rolewicz, 1957)

Niech X będzie przestrzenią quasi-unormowaną z modułem wklęsłości $c \geqslant 1$. Określmy liczbę $0 < p \leqslant 1$ wzorem $(2c)^p = 2$. Istnieje wówczas quasi-norma $|\cdot|$ na X, równoważna quasi-normie $\|\cdot\|$ i spełniająca nierówność

$$|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Twierdzenie (Aoki, 1942 & Rolewicz, 1957)

Niech X będzie przestrzenią quasi-unormowaną z modułem wklęsłości $c \geqslant 1$. Określmy liczbę $0 < p \leqslant 1$ wzorem $(2c)^p = 2$. Istnieje wówczas quasi-norma $|\cdot|$ na X, równoważna quasi-normie $\|\cdot\|$ i spełniająca nierówność

$$|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Szkic dowodu. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in X$ zachodzi

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^p \leqslant 4(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p).$$

Twierdzenie (Aoki, 1942 & Rolewicz, 1957)

Niech X będzie przestrzenią quasi-unormowaną z modułem wklęsłości $c \geqslant 1$. Określmy liczbę $0 < p \leqslant 1$ wzorem $(2c)^p = 2$. Istnieje wówczas quasi-norma $|\cdot|$ na X, równoważna quasi-normie $\|\cdot\|$ i spełniająca nierówność

$$|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p \quad \text{dla } x, y \in X.$$

Szkic dowodu. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in X$ zachodzi

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^p \leqslant 4(\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p).$$

Definiujemy

$$|x| = \inf\Big\{\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{1/p} \ : \ x = \sum_{i=1}^n x_i\Big\} \quad \text{dla } x \in X.$$

Załóżmy, że X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami oraz

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0 \tag{$*$}$$

jest ciągiem dokładnym.

Załóżmy, że X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami oraz

$$(*) \qquad 0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym. Jakie własności przestrzeni Z są implikowane przez analogiczne własności przestrzeni X i Y?

Załóżmy, że X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami oraz

$$(*) \qquad 0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym. Jakie własności przestrzeni Z są implikowane przez analogiczne własności przestrzeni X i Y?

Jeżeli $(*)$ jest ciągiem dokładnym, to Z zawiera domkniętą podprzestrzeń izomorficzną z Y oraz przestrzeń ilorazowa Z/Y jest izomorficzna z X, co zapisujemy $Z/Y \simeq X$.

Twierdzenie (Enflo & Lindenstrauss & Pisier, 1975)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to:

(i) X, Y są refleksywne $\Rightarrow$ Z jest refleksywna;

Twierdzenie (Enflo & Lindenstrauss & Pisier, 1975)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to:

(i) X, Y są refleksywne $\Rightarrow$ Z jest refleksywna;

(ii) X, Y są superrefleksywne $\Rightarrow$ Z jest superrefleksywna;

Twierdzenie (Enflo & Lindenstrauss & Pisier, 1975)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to:

(i) X, Y są refleksywne $\Rightarrow$ Z jest refleksywna;

(ii) X, Y są superrefleksywne $\Rightarrow$ Z jest superrefleksywna;

(iii) X, Y są izomorficzne z przestrzeniami Hilberta $\not\Rightarrow$ Z jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta.

Definicja

Przestrzeń Banacha X nazywamy *superrefleksywną*, jeżeli każda przestrzeń Banacha Y, która jest skończenie reprezentowalna w X, jest przestrzenią refleksywną.

Definicja

Przestrzeń Banacha X nazywamy *superrefleksywną*, jeżeli każda przestrzeń Banacha Y, która jest skończenie reprezentowalna w X, jest przestrzenią refleksywną.

Definicja

Jeżeli X i Y są przestrzeniami Banacha, to mówimy, że Y jest *skończenie reprezentowalna* w X, jeżeli dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $E \subset Y$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka skończenie wymiarowa podprzestrzeń $F \subset X$, że $d(E, F) < 1 + \varepsilon$,

Definicja

Przestrzeń Banacha X nazywamy *superrefleksywną*, jeżeli każda przestrzeń Banacha Y, która jest skończenie reprezentowalna w X, jest przestrzenią refleksywną.

Definicja

Jeżeli X i Y są przestrzeniami Banacha, to mówimy, że Y jest *skończenie reprezentowalna* w X, jeżeli dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $E \subset Y$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka skończenie wymiarowa podprzestrzeń $F \subset X$, że $d(E, F) < 1 + \varepsilon$, gdzie d oznacza tzw. *odległość Banacha-Mazura* określoną wzorem

$$d(E, F) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T\colon E \to F \text{ jest izomorfizmem}\}.$$

Twierdzenie (Giesy, 1966)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to

$$X,\ Y \text{ są } B\text{-wypukłe} \Rightarrow Z \text{ jest } B\text{-wypukła}.$$

Twierdzenie (Giesy, 1966)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to

$$X,\ Y \text{ są } B\text{-wypukłe} \Rightarrow Z \text{ jest } B\text{-wypukła.}$$

Definicja

Dla dowolnej przestrzeni Banacha X definiujemy

$$b_n(X) = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \min\Big\{ \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\Big\| \ :\ \varepsilon_i = \pm 1 \Big\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Twierdzenie (Giesy, 1966)

Jeżeli X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a ciąg

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to

$$X,\ Y \text{ są } B\text{-wypukłe} \Rightarrow Z \text{ jest } B\text{-wypukła.}$$

Definicja

Dla dowolnej przestrzeni Banacha X definiujemy

$$b_n(X) = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \min\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\Big\| \ :\ \varepsilon_i = \pm 1\Big\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

i nazywamy ją *B-wypukłą*, jeżeli $b_n(X) < n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X i Y są B-wypukłymi przestrzeniami Banacha, Z jest $\mathcal{F}$-przestrzenią, a ciąg

$$(*) \qquad 0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to Z jest przestrzenią lokalnie wypukłą

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X i Y są B-wypukłymi przestrzeniami Banacha, Z jest $\mathcal{F}$-przestrzenią, a ciąg

$$(*) \qquad 0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to Z jest przestrzenią lokalnie wypukłą (a zatem - wobec twierdzenia Giesy - jest także B-wypukłą przestrzenią Banacha).

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X i Y są B-wypukłymi przestrzeniami Banacha, Z jest $\mathcal{F}$-przestrzenią, a ciąg

$$(*) \qquad 0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

jest ciągiem dokładnym, to Z jest przestrzenią lokalnie wypukłą (a zatem - wobec twierdzenia Giesy - jest także B-wypukłą przestrzenią Banacha).

Twierdzenie (Roelcke)

Jeżeli X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami, a ciąg $(*)$ jest ciągiem dokładnym, to

X, Y są lokalnie ograniczone $\Rightarrow$ Z jest lokalnie ograniczona.

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami, a ciąg $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest ciągiem dokładnym, to

$$\left.\begin{array}{r} X \text{ jest } p\text{-przestrzenią Banacha} \\ Y \text{ jest } r\text{-przestrzenią Banacha} \\ 0 < p < r \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} Z \text{ jest } p\text{-przestrzenią} \\ \text{Banacha.} \end{array}$$

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X, Y, Z są $\mathcal{F}$-przestrzeniami, a ciąg $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest ciągiem dokładnym, to

$$\left.\begin{array}{r} X \text{ jest } p\text{-przestrzenią Banacha} \\ Y \text{ jest } r\text{-przestrzenią Banacha} \\ 0 < p < r \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} Z \text{ jest } p\text{-przestrzenią} \\ \text{Banacha.} \end{array}$$

Twierdzenie (Kalton & Peck, 1979)

Dla każdego $0 < p \leqslant 1$ istnieje quasi-przestrzeń Banacha Z, która nie jest p-przestrzenią Banacha, mimo że zawiera taką podprzestrzeń $Y \simeq \ell^p$, że $Z/Y \simeq \ell^p$.

Definicja (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą $\mathcal{F}$-przestrzeniami. Mówimy, że para (X, Y) *rozszczepia się*, jeżeli dla każdej $\mathcal{F}$-przestrzeni Z, dla której ciąg $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest dokładny, ciąg ten rozszczepia się.

Definicja (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą $\mathcal{F}$-przestrzeniami. Mówimy, że para (X, Y) *rozszczepia się*, jeżeli dla każdej $\mathcal{F}$-przestrzeni Z, dla której ciąg $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest dokładny, ciąg ten rozszczepia się.

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Jeżeli X i Y są $\mathcal{F}$-przestrzeniami, to para (X, Y) rozszczepia się wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\mathcal{F}$-przestrzeni Z zawierającej podprzestrzeń $Y_1 \simeq Y$ oraz każdego ciągłego operatora liniowego $T\colon X \to Z/Y_1$ istnieje taki ciągły operator liniowy $\widetilde{T}\colon X \to Z$, że $\pi \widetilde{T} = T$.

Definicja (Kalton & Peck, 1979)

Niech X i Y będą $\mathcal{F}$-przestrzeniami. *Sumą skrętną* przestrzeni X i Y nazywamy każdą taką $\mathcal{F}$-przestrzeń Z, która zawiera podprzestrzeń $X_1 \simeq X$ spełniającą $Z/X_1 \simeq Y$.

Definicja (Kalton & Peck, 1979)

Niech X i Y będą $\mathcal{F}$-przestrzeniami. *Sumą skrętną* przestrzeni X i Y nazywamy każdą taką $\mathcal{F}$-przestrzeń Z, która zawiera podprzestrzeń $X_1 \simeq X$ spełniającą $Z/X_1 \simeq Y$. Sumę taką nazywamy *trywialną*, gdy X_1 jest komplementarna w Z i wówczas $Z \simeq X \oplus Y$.

Definicja (Kalton & Peck, 1979)

Niech X i Y będą $\mathcal{F}$-przestrzeniami. *Sumą skrętną* przestrzeni X i Y nazywamy każdą taką $\mathcal{F}$-przestrzeń Z, która zawiera podprzestrzeń $X_1 \simeq X$ spełniającą $Z/X_1 \simeq Y$. Sumę taką nazywamy *trywialną*, gdy X_1 jest komplementarna w Z i wówczas $Z \simeq X \oplus Y$.

Idea użycia tzw. *operatorów quasi-liniowych* do konstrukcji nietrywialnych sum skrętnych pochodzi od Kaltona (1978) oraz Ribe (1979).

Definicja

Niech X i Y będą rzeczywistymi przestrzeniami quasi-unormowanymi. Operator $F\colon X \to Y$ nazywamy *quasi-liniowym*, jeżeli zachodzą warunki:

(i) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$;

(ii) $\|F(x+y) - F(x) - F(y)\| \leqslant M(\|x\| + \|y\|)$ dla $x, y \in X$,

gdzie M jest pewną stałą. Najmniejszą możliwą jej wartość oznaczamy przez $\Delta(F)$. Rodzinę wszystkich operatorów quasi-liniowych odwzorowujących X w Y oznaczamy przez $\Lambda(X, Y)$.

Jeżeli X i Y są quasi-przestrzeniami Banacha (czyli lokalnie ograniczonymi $\mathcal{F}$-przestrzeniami), a operator $F \in \Lambda(Y, X)$, to definiujemy sumę skrętną $X \oplus_F Y$ jako przestrzeń liniową $X \oplus Y$ wyposażoną w quasi-normę

$$\|(x, y)\| = \|y\| + \|x - F(y)\|.$$

Jeżeli X i Y są quasi-przestrzeniami Banacha (czyli lokalnie ograniczonymi $\mathcal{F}$-przestrzeniami), a operator $F \in \Lambda(Y, X)$, to definiujemy sumę skrętną $X \oplus_F Y$ jako przestrzeń liniową $X \oplus Y$ wyposażoną w quasi-normę

$$\|(x, y)\| = \|y\| + \|x - F(y)\|.$$

Twierdzenie (Kalton & Peck, 1979)

Jeżeli X, Y, Z są quasi-przestrzeniami Banacha i Z jest sumą skrętną przestrzeni X oraz Y, to istnieje taki operator $F \in \Lambda(Y, X)$, że $Z \simeq X \oplus_F Y$.

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą quasi-przestrzeniami Banacha, a X_0 - gęstą podprzestrzenią X. Wówczas następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą quasi-przestrzeniami Banacha, a X_0 - gęstą podprzestrzenią X. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) para (X, Y) rozszczepia się;

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą quasi-przestrzeniami Banacha, a X_0 - gęstą podprzestrzenią X. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) para (X, Y) rozszczepia się;

(ii) dla każdego $F \in \Lambda(X_0, Y)$ istnieje taki operator liniowy $H\colon X_0 \to Y$ oraz stała $L < \infty$, że
$$\|F(x) - H(x)\| \leqslant L\|x\| \quad \text{dla } x \in X_0;$$

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Niech X i Y będą quasi-przestrzeniami Banacha, a X_0 - gęstą podprzestrzenią X. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) para (X, Y) rozszczepia się;

(ii) dla każdego $F \in \Lambda(X_0, Y)$ istnieje taki operator liniowy $H\colon X_0 \to Y$ oraz stała $L < \infty$, że
$$\|F(x) - H(x)\| \leqslant L\|x\| \quad \text{dla } x \in X_0;$$

(iii) istnieje taka stała $B < \infty$, że dla każdego $F \in \Lambda(X_0, Y)$ istnieje operator liniowy $H\colon X_0 \to Y$ spełniający
$$\|F(x) - H(x)\| \leqslant B\Delta(F)\|x\| \quad \text{dla } x \in X_0.$$

(W tym przypadku symbolem $\kappa(X, Y)$ oznaczamy najmniejszą możliwą wartość stałej B.)

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Pary (ℓ^p, Y) oraz (L^p, Y) rozszczepiają się dla każdej r-przestrzeni Banacha Y, o ile $0 < p < r \leqslant 1$.

III. Rozszczepialność i operatory quasi-liniowe

Przykłady

Twierdzenie (Kalton, 1978)

Pary (ℓ^p, Y) oraz (L^p, Y) rozszczepiają się dla każdej r-przestrzeni Banacha Y, o ile $0 < p < r \leqslant 1$.

Twierdzenie (Kalton & Peck, 1979)

Pary (ℓ^p, ℓ^p) oraz (L^p, L^p) nie rozszczepiają się dla żadnego $0 < p < \infty$.

Definicja (Kalton & Peck, 1978)

Jeżeli X jest $\mathcal{F}$-przestrzenią, to X nazywamy $\mathcal{K}$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy para $(X, \mathbb{R})$ rozszczepia się.

Definicja (Kalton & Peck, 1978)

Jeżeli X jest $\mathcal{F}$-przestrzenią, to X nazywamy $\mathcal{K}$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy para $(X, \mathbb{R})$ rozszczepia się.

Twierdzenie (Kalton,1978)

Niech $0 < p < \infty$. Przestrzeń ℓ^p (czy też L^p) jest $\mathcal{K}$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq 1$.

Twierdzenie (Kalton & Roberts, 1983)

Istnieje uniwersalna stała $K \leqslant \frac{89}{2}$ o następującej własności. Jeżeli Ω jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{A}$ jest algebrą podzbiorów zbioru Ω, a funkcja $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

Twierdzenie (Kalton & Roberts, 1983)

Istnieje uniwersalna stała $K \leqslant \frac{89}{2}$ o następującej własności. Jeżeli Ω jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{A}$ jest algebrą podzbiorów zbioru Ω, a funkcja $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$(A, B \in \mathcal{A} \text{ i } A \cap B = \emptyset) \Rightarrow |\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant \varepsilon$$

Twierdzenie (Kalton & Roberts, 1983)

Istnieje uniwersalna stała $K \leqslant \frac{89}{2}$ o następującej własności. Jeżeli Ω jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{A}$ jest algebrą podzbiorów zbioru Ω, a funkcja $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$(A, B \in \mathcal{A} \text{ i } A \cap B = \emptyset) \Rightarrow |\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant \varepsilon$$

z pewnym $\varepsilon \geqslant 0$, to istnieje taka addytywna funkcja zbioru $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, że

$$|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K\varepsilon \quad \text{dla } A \in \mathcal{A}.$$

Twierdzenie (Kalton & Roberts, 1983)

Istnieje uniwersalna stała $K \leqslant \frac{89}{2}$ o następującej własności. Jeżeli Ω jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{A}$ jest algebrą podzbiorów zbioru Ω, a funkcja $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$(A, B \in \mathcal{A} \text{ i } A \cap B = \emptyset) \Rightarrow |\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant \varepsilon$$

z pewnym $\varepsilon \geqslant 0$, to istnieje taka addytywna funkcja zbioru $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, że

$$|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K\varepsilon \quad \text{dla } A \in \mathcal{A}.$$

Wniosek (Kalton, Roberts, 1983)

Przestrzenie c_0 oraz ℓ^∞ są $\mathcal{K}$-przestrzeniami.

Definicja

Arytmetyczną funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nazywamy *addytywną*, jeżeli

$$x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{NWD}(x, y) = 1 \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y).$$

Definicja

Arytmetyczną funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nazywamy *addytywną*, jeżeli

$$x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{NWD}(x, y) = 1 \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y).$$

Nazywamy ją zaś *silnie addytywną*, jeżeli jest addytywna oraz dla każdej liczby pierwszej p i każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$f(p^k) = f(p).$$

Definicja

Arytmetyczną funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nazywamy *addytywną*, jeżeli

$$x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{NWD}(x, y) = 1 \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y).$$

Nazywamy ją zaś *silnie addytywną*, jeżeli jest addytywna oraz dla każdej liczby pierwszej p i każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$f(p^k) = f(p).$$

Dla każdego $x \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez P_x zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby x. Oczywiście jeżeli f jest funkcją silnie addytywną, to mamy

$$x, y \in \mathbb{N}, P_x = P_y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Twierdzenie

Niech X będzie taką rzeczywistą refleksywną przestrzenią Banacha, że para (X^*, ℓ^1) rozszczepia się. Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{N} \to X$ spełnia warunek:

$$x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{NWD}(x, y) = 1 \Rightarrow \|f(xy) - f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

z pewnym $\varepsilon \geqslant 0$ oraz

$$x, y \in \mathbb{N},\ P_x = P_y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\varepsilon,$$

to istnieje taka silnie addytywna funkcja $\widetilde{f}\colon \mathbb{N} \to X$, że

$$\|f(x) - \widetilde{f}(x)\| \leqslant (1 + 4\kappa(X^*, \ell^1))K\varepsilon \quad \text{dla } x \in \mathbb{N}.$$

Bibliografia

[1] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer 2006.

[2] T. Aoki, *Locally bounded linear topological spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942).

[3] A. Beck, *A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 329–334.

[4] P. Enflo, J. Lindenstrauss, G. Pisier, *On the 'three space problem'*, Math. Scand. 36 (1975), 199–210.

[5] N. J. Kalton, *The three space problem for locally bounded F-spaces*, Compositio Math. 37 (1978), 243–276.

Bibliografia

[6] N. J. Kalton, N. T. Peck, *Quotients of $L_p(0,1)$ for $0 \leqslant p < 1$*, Studia Math. 64 (1979), 65–75.

[7] N. J. Kalton, N. T. Peck, *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 1–30.

[8] N. J. Kalton, J. W. Roberts, *Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), 803–816.

[9] S. Rolewicz, *On certain classes of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), 471–473.