Charakteryzacja rodzin Beckenbacha dopuszczających nieciągłe funkcje jensenowsko afiniczne

Michał Lewicki

Rodzina Beckenbacha

Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie otwartym odcinkiem.
$\mathcal{C}(I) \colon = \{f \colon I \to \mathbb{R} \colon f - \text{ciągła}\}$;
$\mathcal{CM}(I) \colon = \{f \colon I \to \mathbb{R} \colon f - \text{ciągła i monotoniczna}\}$.

Rozważmy rodzinę (afiniczną)

$$\mathcal{F} \colon = \{I \ni x \mapsto ax + b \in \mathbb{R} \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

Zauważmy, że rodzina $\mathcal{F}$ ma następującą własność:

$$(W) \qquad \bigwedge_{\substack{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in I\times\mathbb{R} \\ x_1 \neq x_2}} \quad \bigvee_{f\in\mathcal{F}} ! \quad \bigwedge_{i\in\{1,2\}} f(x_i) = y_i.$$

Definicja 1. (zob. E.F. Beckenbach [1]) *Rodzinę funkcji $\mathcal{F} \subseteq C(I)$ nazywamy rodziną Beckenbacha na I jeśli spełnia warunek (W).*

Przykład 1. *Niech $\alpha \colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną. Rodzina*

$$\mathcal{F}_\alpha \colon = \{I \ni x \mapsto a\alpha(x) + b \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

jest rodziną Beckenbacha.

Przykład 2. *Funkcję $F \colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nazywamy dwuparametrową, ciągłą rodziną Beckenbacha na I, jeśli F jest ciągła oraz rodzina*

$$\mathcal{F}_F \colon = \{I \ni x \mapsto F(x, a, b) \in \mathbb{R} \colon a, b \in \mathbb{R}\},$$

jest rodziną Beckenbacha na I. Ponadto powiemy, że F jest rodziną monotoniczną jeśli $\mathcal{F}_F \subseteq \mathcal{CM}(I)$.

Funkcje jensenowsko afiniczne względem rodziny Beckenbacha

Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(I)$ będzie rodziną Beckenbacha. Powiemy, że funkcja $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$–jensenowsko afiniczna (jensenowsko afiniczna względem rodziny $\mathcal{F}$) jeśli dla pewnych $x, y \in I$ spełnienie warunku

$$\begin{cases} \varphi(x) = \psi(x), \\ \varphi(y) = \psi(y), \end{cases} \tag{1}$$

dla pewnego $\psi \in \mathcal{F}$ implikuje

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \psi\Big(\frac{x+y}{2}\Big). \tag{2}$$

Ponadto, jeśli $F\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dwuparametrową, ciągłą rodziną Beckenbacha, to powiemy, że $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest F–jensenowsko afiniczna jeśli jest jensenowsko afiniczna względem rodziny $\mathcal{F}_F\colon = \{F(\cdot, a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

Łatwy rachunek pokazuje, że

Stwierdzenie 1. *Jeśli $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, jensenowsko afiniczna względem rodziny Beckenbacha $\mathcal{F}$, to $\varphi \in \mathcal{F}$.*

Stwierdzenie 2. *Funkcja $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest jensenowsko afiniczna względem rodziny afinicznej wtw., gdy spełnia równanie funkcyjne*

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}, \quad x, y \in I. \tag{3}$$

Uwaga: Istnieją nieciągłe rozwiązania równania (3).

Pytanie: Jak scharakteryzować rodziny Beckenbacha $\mathcal{F}$, które dopuszczają istnienie funkcji **nieciągłych** $\mathcal{F}$ - jensenowsko afinicznych?

A) Odpowiedź na powyższe pytanie w przypadku rodziny Beckenbacha postaci $\mathcal{F}_\alpha$ udzielił prof. Janusz Matkowski

Twierdzenie 1. (zob. J. Matkowski [3]) *Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, a $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ ciągłą i ściśle monotoniczną funkcją. Istnieje nieciągła co najmniej w jednym punkcie, $\mathcal{F}_\alpha$-jensenowsko afiniczna funckja wtw., gdy istnieją $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, $ps \neq rq$, takie, że*

$$\alpha(x) = \frac{px+q}{rx+s}, \quad x \in I,$$

tj., α jest homografią.

B) Odpowiedź w przypadku dwuparametrowych, ciągłych rodzin Beckenbacha.

Stwierdzenie 3. *Niech* $h\colon I \to \mathbb{R}$ *będzie homeomorfizmem, a funkcje* $G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będą ciągłe. Załóżmy, że* $F\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest dwuparametrową rodziną Beckenbacha na* I *postaci*

$$F(u, a, b) = h(G(a, b)u + H(a, b)), \tag{4}$$

dla $u \in I$ *oraz* $a, b \in \mathbb{R}$. *Funkcja* $\tilde{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}$ *jest* F *– jensenowsko afiniczna wtw., gdy* $\tilde{\varphi} = h \circ \varphi$, *gdzie* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *jest funkcją spełniającą równanie* (3).

W dalszej części ograniczymy się do przypadku $I = \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. *Niech* $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będzie ciągłą, monotoniczną, dwuparametrową rodziną Beckenbacha. Jeśli istnieje funkcja nieciągła co najmniej w jednym punkcie,* F*-jensenowsko afiniczna, to istnieje ciągła i ściśle rosnąca funkcja* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taka, że*

$$F(u, a, b) = g((g^{-1}(F(1, a, b)) - g^{-1}(F(0, a, b)))u + g^{-1}(F(0, a, b))), \tag{5}$$

dla wszelkich $u, a, b \in \mathbb{R}$.

Dowód. Główne narzędzie: Tw.: Nikodema-Pálesa (zob. [4]).

Twierdzenie 3. (Agata Nowak) *Niech* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną. Jeśli* $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest dwuparametrową rodziną Beckenbacha postaci*

$$F(u, a, b) = a\alpha(u) + b, \quad u, a, b \in \mathbb{R},$$

oraz istnieje funkcja nieciągła co najmniej w jednym punkcie, F*-jensenowsko afiniczna, to*

$$\alpha(u) = cu + d, \quad u \in \mathbb{R},$$

dla pewnych $c, d \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. *Niech* $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *będzie ciągłą, monotoniczną, dwuparametrową rodziną Beckenbacha. Jeśli istnieje funkcja nieciągła co najmniej w jednym punkcie,* F*–jensenowsko afiniczna, to istnieje ciągła i ściśle rosnąca funkcja* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oraz ciągłe funkcje* $G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$F(u, a, b) = h(G(a, b)u + H(a, b)), \quad u, a, b \in \mathbb{R}.$$

Charakteryzacja rodzin Beckenbacha postaci (4)

Twierdzenie 5. *Niech* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie homeomorfizmem, a* $G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Ponadto, załóżmy, że* $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą daną wzorem*

$$F(u,a,b) = h(G(a,b)u + H(a,b)), \quad u,a,b \in \mathbb{R}.$$

Rodzina $\mathcal{F}_F\colon = \{\mathbb{R} \ni u \mapsto F(u,a,b) \in \mathbb{R}\colon a,b \in \mathbb{R}\}$ *jest rodziną Beckenbacha wtw., gdy funkcja* $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zdefiniowana wzorem*

$$J(a,b) = (G(a,b), H(a,b)), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

jest homeomorfizmem.

Bibliografia

[1] E.F. Beckenbach *Generalized convex functions* Bull. Amer. Math. Soc. vol. 43 (1937) p. 363-371.

[2] M. Lewicki *A characterization of Beckenbach families admitting discontinuous Jensen affine functions*, przesłane do recenzji

[3] J. Matkowski *Generalized convex functions and a solution of a problem of Zs. Pales*, Publ. Math. Debrecen **73/3-4** (2008), 421–460.

[4] K. Nikodem, Zs. Páles *A characterization of midpoint-quasiaffine functions*, Publ. Math. Debrecen **52/3-4** (1998), 575–595.