Równania Chiniego

Agata Nowak, Maciej Sablik

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski w Katowicach

21 września 2010

$$F(x+y)+F(x+z)=cF(x+u(y,z)) \quad (x,y,z\in\mathbb{R}) \tag{1}$$

$$f(x+y)f(x+z)=cf(x+u(y,z)) \quad (x,y,z\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

$$f(x+y)f(x+z)=\psi(x+u(y,z)) \quad (x,y,z\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

- 1825, Gompertz, 'On the nature of the function expressive of the law of Human Mortality' na podstawie obserwacji stawia hiotezę , że natężenie śmiertelności rośnie wykładniczo, czyli $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}$ z pewnymi $B > 0, c > 1$
- 1839, A. De Morgan próbuje znaleźć matematyczne uzasadnienie dla tego prawa
- 1859, A. De Morgan, 'On a property of Mr. Gompertz's law of mortality' ponownie zajmuje się tym zagadnieniem, przy czym tym razem bada je w większej ogólności i dochodzi do równania (1). De Morgan rozwiązuje je dla funkcji różniczkowalnych na prostej.
- W matematyce aktuarialnej ponownie pojawia się to równanie w pracy M. Chiniego z 1907 roku i A. Guerraggio z 1986 roku. M. Chini rozwiązuje je w klasie funkcji różniczkowalnych.
- W pracy T. Riedel, M. Sablik, P. K. Sahoo, (2001) pojawia sie rozwiązanie przy słabszych założeniach regularnościowych i na przedziałach:

Twierdzenie (T. Riedel, M. Sablik, P. K. Sahoo, (2001))

Załóżmy, że $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *są przedziałami,* $F\colon I + J \to \mathbb{R}$ *jest lokalnie ograniczona z góry (lub z dołu) oraz* $\Psi\colon J \times J \to J$ *jest ciągła ze względu na każdą ze zmiennych. Wówczas* (F, Ψ) *spełnia* (1) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi pewien z następujących przypadków:*

1. $c = 2$, *F jest funkcją stałą,* Ψ *dowolną funkcją ciągłą ze względu na każdą ze zmiennych,*
2. $c \neq 2$, $F = 0$, Ψ *dowolną funkcją ciągłą ze względu na każdą ze zmiennych,*
3. $c = 2$, *istnieją takie stałe* $k \neq 0, b \in \mathbb{R}$, *że* $F(z) = kz + b$, $\Psi(x, y) = \frac{x+y}{2}$,
4. $c = 2$, *istnieją takie stałe* $a, k \neq 0, b \in \mathbb{R}$, *że* $F(z) = k\exp(az) + b$, $\Psi(x, y) = \frac{1}{a}\ln(\frac{\exp(ax)+\exp(ay)}{2})$,
5. $c \notin \{0, 2\}$, *istnieją takie stałe* $a, k \neq 0, b \in \mathbb{R}$, *że* $F(z) = k\exp(az)$, $\Psi(x, y) = \frac{1}{a}\ln(\frac{\exp(ax)+\exp(ay)}{c})$, *a* $J = \mathbb{R}$ *lub J jest półosią*

Założenia (A):

$$\begin{cases} f, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ spełniają równanie (3)} \\ Z_f = f^{-1}(\{0\}),\ Z_\psi = \psi^{-1}(\{0\}) \\ u_1(x, y) = u(x, y) - x,\ u_2(x, y) = u(x, y) - y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ \gamma(y) = u(y, y) - y \quad (y \in \mathbb{R}) \\ u_1(\mathbb{R}^2) = |l_1, r_1|, u_2(\mathbb{R}^2) = |l_2, r_2|, \text{gdzie} \\ -\infty \le l_1 \le r_1 \le +\infty, -\infty \le l_2 \le r_2 \le +\infty \end{cases}$$

Lemat

Jeśli spełnione są założenia (A) i $Z_f \neq \emptyset, Z_f \neq \mathbb{R}$*, to istnieją takie stałe* $\alpha, c, T \in \mathbb{R}$*, że*

$$\begin{cases} Z_f = (-\infty, \alpha], Z_\psi = (-\infty, \alpha + T], \\ u(y,z) = T + min\{y,z\}, \\ f(x) = c \text{ dla } x > \alpha, \psi(x) = c^2 \text{ dla } x > \alpha + T \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} Z_f = [\alpha, +\infty), Z_\psi = [\alpha + T, +\infty), \\ u(y,z) = T + max\{y,z\}, \\ f(x) = c \text{ dla } x < \alpha, \psi(x) = c^2 \text{ dla } x < \alpha + T \end{cases}$$

Szkic dowodu:

1. Z (3) dla $x_0 \in Z_f, y, z \in \mathbb{R}$ mamy
$0 = f(x_0)f(x_0 - y + z) = \psi(x_0 + u_1(y, z))$, a więc
$x_0 + |l_1, r_1| \subseteq Z_\psi$. Podobnie $x_0 + |l_2, r_2| \subseteq Z_\psi$.

2. Niech I_ψ będzie dowolnym przedziałem zawartym w Z_ψ. Jeśli
$x, y \in \mathbb{R},\ x + u(y, y) \in I_\psi$, to z (3) wynika, ze $x + y \in Z_f$. Zatem
$I_\psi - u(y, y) + y = I_\psi - \gamma(y) \subseteq Z_f$. W szczególności, biorąc
$I_\psi = x_0 + |l_1, r_1|$ i $I_\psi = x_0 + |l_2, r_2|$ dla $x_0 \in Z_f$ i korzystając z 1.,
dostajemy $x_0 + |l_k - \gamma(y), r_k - \gamma(y)| \subseteq Z_f \qquad (k = 1, 2)$.

3. Zauważmy, że $\gamma(y_0) = u_1(y_0, y_0) = u_2(y_0, y_0)$ dla $y_0 \in \mathbb{R}$,
więc $\gamma(y_0) \in |l_1, r_1|, |l_2, r_2|$.
Jeśli istnieje taki $y_0 \in \mathbb{R}$, że $l_1 < \gamma(y_0) < r_1$ lub $l_2 < \gamma(y_0) < r_2$,
to z 2. wynika, że $Z_f = \mathbb{R}$, co jest sprzeczne z założeniem.
Zatem $\gamma(\mathbb{R}) \subseteq \{l_1, r_1, l_2, r_2\} \cap \mathbb{R}$.
Jeśli $l_1 < \gamma(y) = r_1$ lub $l_2 < \gamma(y) = r_2$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$, to z
2. mamy $x_0 + (-\infty, 0] = (-\infty, x_0] \subseteq Z_f$ dla każdego $x_0 \in Z_f$.
Wówczas $Z_f = (-\infty, \alpha]$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jeśli $l_1 = \gamma(y) < r_1$ lub $l_2 = \gamma(y) < r_2$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$, to z 2. mamy $x_0 + [0, +\infty) = [x_0, +\infty) \subseteq Z_f$ dla każdego $x_0 \in Z_f$. Wówczas $Z_f = [\alpha, +\infty)$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.
Jeśli $l_1 = r_1$ lub $l_2 = r_2$, to odpowiednio u_1 lub u_2 jest stała.

4. Rozpatrujemy najpierw przypadek, gdy u_1, u_2 są niestałe i $Z_f = (-\infty, \alpha], \alpha \in \mathbb{R}$ (rozumowanie w przypadku gdy $Z_f = [\alpha, +\infty)$ jest analogiczne). Wówczas $l_1, l_2 < \gamma(y) = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$.

5. Z równania (3) i 4. łatwo wynika, że $Z_\psi = (-\infty, \alpha + r_1]$.

6. Z (3) dostajemy równoważność
$x + u(y, z) \notin Z_\psi \Longleftrightarrow x + y, x + z \notin Z_f$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.
Korzystając dodatkowo z równosci $Z_f = (-\infty, \alpha]$, $Z_\psi = (-\infty, \alpha + r_1]$, otrzymujemy kolejno dla $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$u^{-1}((a, +\infty)) = (a - r_1, +\infty) \times (a - r_1, +\infty),$$

$$u^{-1}((-\infty, b]) = (-\infty, b - r_1] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, b - r_1],$$

$$u^{-1}((a, b]) = (a-r_1, b-r_1] \times (a-r_1, +\infty) \cup (a-r_1, +\infty) \times (a-r_1, b-r_1]$$

i ostatecznie

$$u(y,z) = min\{y,z\} + r_1 \quad (y,z \in \mathbb{R}).$$

7. Określamy funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = f(x - r_1), x \in \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $x, y, z \in \mathbb{R}$. Podstawiając w (3) $x - r_1$ w miejsce x i korzystając z określenia g, dostajemy

$$\psi(x + \min\{y,z\}) = g(x+y)g(x+z).$$

Przyjmując w powyższej równości $y = z$, otrzymujemy $\psi(x+y) = g(x+y)^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, więc $\psi = g^2 \geq 0$. Z $Z_f = (-\infty, \alpha]$ i określenia g, mamy $g(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq \alpha + r_1$. Podstawiając powyżej $x > \alpha + r_1, y = 0, z > 0$, dostajemy

$$g(x)g(x+z) = g(x)^2.$$

Zatem $g(x) = g(x+z)$ dla każdego $x > \alpha + r_1, z > 0$, więc $g|_{(\alpha + r_1, +\infty)} \equiv c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Skoro $\psi = g^2$, to $\psi|_{(\alpha + r_1, +\infty)} \equiv c^2$.

8. Jeśli na przykład $u_1(y,z) = C$ dla $y, z \in \mathbb{R}$, to $u_2(y,z) = y - z + C$ dla $y, z \in \mathbb{R}$, więc $u_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}, l_2 = -\infty, r_2 = +\infty$ i z 2. wynika, że $Z_f = \mathbb{R}$, co jest sprzeczne z założeniami lematu.

$\square$

Twierdzenie

Jeśli spełnione są założenia (A), to zachodzi pewien z następujących warunków:

1. *funkcje f i g są stale równe* 0
2. $$\begin{cases} Z_f = (-\infty, \alpha], Z_\psi = (-\infty, \alpha + T], \\ u(y,z) = T + min\{y,z\}, \\ f(x) = 0 \text{ dla } x \leq \alpha, f(x) = c \text{ dla } x > \alpha, \\ \psi(x) = 0 \text{ dla } x \leq \alpha + T, \psi(x) = c^2 \text{ dla } x > \alpha + T \end{cases},$$
3. $$\begin{cases} Z_f = [\alpha, +\infty), Z_\psi = [\alpha + T, +\infty), \\ u(y,z) = T + max\{y,z\}, \\ f(x) = 0 \text{ dla } x \geq \alpha, f(x) = c \text{ dla } x < \alpha, \\ \psi(x) = 0 \text{ dla } x \geq \alpha + T, \psi(x) = c^2 \text{ dla } x < \alpha + T \end{cases},$$
4. $f(x), \psi(x) > 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$ *i funkcje* $F = \ln f, \Psi = \ln \psi$ *spełniają równania* $F(x+y) + F(x+z) = \Psi(x + u(y,z))$,
5. $f(x) < 0, \psi(x) > 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$ *i funkcje* $F = \ln(-f), \Psi = \ln \psi$ *spełniają równanie* $F(x+y) + F(x+z) = \Psi(x + u(y,z))$.

M. Chini,
Sopra un'equazione da cui discendo due notevoli formule di Mat
Period. Mat. 4 (1907), 264-270.

A. De Morgan,
On a property of Mr. Gompertz's law of mortality.,
Assurance Magazine J. Inst. Actuaries 81 (1859), 181-184.

A. Guerraggio,
Le equazioni funzionali nei fondamenti della matematica finanzie
Riv. Mat. Sci. Econom. Social. 9 (1986), 33-52.

T. Riedel, M. Sablik, P. K. Sahoo,
On a Functional Equation in Actuarial Mathematics., JMAA
253 (2001), 16-34.