Pewne rozkłady prostej

Zygfryd Kominek
zkominek@ux2.math.us.edu.pl

Institute of Mathematics
Silesian University, Katowice

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki

Wisła, 21.09.2010 - 24.09.2010

Jednym z warunków równoważnych mierzalności w sensie Lebesgue'a podzbioru A prostej rzeczywistej jest istnienie takiego zbioru G typu $\mathcal{G}_\delta$ pokrywającego dany zbiór, że miara zewnętrzna Lebesgue'a różnicy $G \setminus A$ jest równa zero.

Niech $\mathbb{Q}$ będzie zbiorem wszystkich liczb wymiernych. Oczywiście, $\mathbb{Q}$, jako przeliczalna suma zbiorów jednopunktowych jest zbiorem mierzalnym o mierze Lebesgue'a równej zero. Istnieje zatem taki zbiór G typu $\mathcal{G}_\delta$ zawierający zbiór $\mathbb{Q}$, że $|G \setminus \mathbb{Q}| = 0$ (symbol $|S|$ oznacza tu miarę zewnętrzną Lebesgue'a zbioru S). Przyjmując $H = \mathbb{R} \setminus G$ otrzymujemy rozkład prostej rzeczywistej na dwa zbiory H i G:

$$\mathbb{R} = H \cup G, \tag{1}$$

przy czym G jest typu $\mathcal{G}_\delta$ o zerowej mierze Lebesgue'a. Wobec tego H jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$ pełnej miary.

Zwróćmy uwagę na fakt, że zbiór H jest zbiorem pierwszej kategorii (Baire'a). Istotnie, jeśli

$$\mathbb{Q} \subset G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n,$$

przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór G_n jest otwarty i, oczywiście, zawiera $\mathbb{Q}$, to

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n', \qquad (G_n' := \mathbb{R} \setminus G_n)$$

i żaden ze zbiorów G_n' nie zawiera żadnego przedziału (bo zbiory G_n są gęste w $\mathbb{R}$). Dlatego H jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych i nigdziegęstych, a więc zbiorem pierwszej kategorii.

Rozkład (1) jest przykładem rozkładu osi liczbowej na dwa zbiory: jeden G bardzo duży z punktu widzenia topologii (bo rezydualny w $\mathbb{R}$), a z drugiej strony bardzo mały z punktu widzenia teorii miary (bo miary Lebesgue'a zero) , a drugi H bardzo mały z punktu widzenia topologii (bo pierwszej kategorii), a z drugiej strony bardzo duży z punktu widzenia teorii miary (bo pełnej miary Lebesgue'a).

Na zwrot "podzbiór osi liczbowej jest duży" można popatrzeć też w inny sposób. W pewnym stopniu jest to związane ze sławnym twierdzeniem Steinhausa o zbiorze odległości. Mianowicie: mówimy, że podzbiór A osi liczbowej jest duży w sensie Steinhausa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$int(A - A) \neq \emptyset.$$

Tutaj przez $A - B$ rozumiemy zbiór wszystkich różnic $a - b$, gdzie $a \in A, \; b \in B$.

Owo sławne twierdzenie Steinhausa mówi, że jeśli podzbiory A i B osi liczbowej mają dodatnią miarę Lebesgue'a, to zbiór $A - B$ ma niepuste wnętrze

.

Bezpośrednio stąd dowiadujemy się, że każdy podzbiór osi liczbowej o dodatniej mierze (wewnętrznej) Lebesgue'a jest duży w sensie Steinhausa. Inne twierdzenie udowodnione przez S. Piccard orzeka, że każdy podzbiór osi zawierający zbiór drugiej kategorii z własnością Baire'a jest też duży w sensie Steinhausa. Wracając do rozkładu (1) osi liczbowej stwierdzamy, że obydwa zbiory G i H są duże w sensie Steinhausa.

Ciekawe, acz może nie jakoś specjalnie ważne może być pytanie czy $\mathrm{int}\,(G - H) \neq \emptyset$?

Powyższe pytanie może być ineresujące ponieważ istnieją takie dwa zbiory - jeden A pełnej miary, drugi B rezydualny w $\mathbb{R}$, że

$$int(A - B) = \emptyset.$$

Zobaczmy jak takie zbiory można skonstruować. Niech C będzie zwartym nigdziegęstym podzbiorem osi o dodatniej mierze Lebesgue'a i połóżmy

$$B = (\mathbb{Q} - C) \cup (\mathbb{Q} + C), \quad A = \mathbb{R} \setminus B.$$

Zauważmy, ze B jest zbiorem pierwszej kategorii (jako suma przeliczalna zbiorów nigdziegęstych) i mierzalnym w sensie Lebesgue'a (jako przeliczalna suma zbiorów domkniętych). Dlatego A jest zbiorem rezydualnym w $\mathbb{R}$, także mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Ponadto, co bardzo ważne z punktu widzenia naszej konstrukcji, $B = -B$ oraz

$$\mathbb{Q} + B \subset B.$$

Pokażemy, że

$$(A - B) \cap \mathbb{Q} = \emptyset. \tag{2}$$

Istotnie, gdyby tak nie było, to mielibyśmy istnienie takich liczb $q \in \mathbb{Q}$, $a \in A$, $b \in B$, że $q = a - b$. Stąd $B \ni q + b = a \in A$, co jest przecież niemożliwe, bo zbiory A i B są rozłączne. Z warunku (2) wynika bezpośrednio, że

$$int(A - B) = \emptyset,$$

co zapowiadaliśmy. Przy okazji możemy zauważyć, że skonstruowany zbiór A musi mieć miarę Lebesgue'a równą zero. Gdyby bowiem jego miara była dodatnia, to ponieważ miara zbioru B jest również dodatnia, z cytowanego wyżej twierdzenia Steinhausa wynikałoby, że int $(A - B) \neq \emptyset$.

Przyjrzyjmy się jeszcze przez chwilę powyższej konstrukcji. Wystartowaliśmy od zbioru miary dodatniej C. Dodaliśmy do niego zbiór symetryczny względem zera, a pożniej rozważaliśmy zbiór będący mnogościową sumą wszystkich translacji sumy $C \cup (-C)$ o dowolną liczbę wymierną. W efekcie otrzymaliśmy zbiór B pełnej miary. Przypadek, czy prawidłowość? Okazuje się, że aby otrzymać zbiór pełnej miary na osi wystarczy nawet nieco mniej. Możemy bowiem udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie.

Niech E będzie podzbiorem osi liczbowej o dodatniej mierze Lebesgue'a i niech D będzie dowolnym przeliczalnym i gęstym podzbiorem $\mathbb{R}$. Wówczas zbiór $A := D + E$ jest pełnej miary w $\mathbb{R}$.

Dowód. Połóżmy $B = \mathbb{R} \setminus A$. Ponieważ A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a (jako przeliczalna suma zbiorów mierzalnych), taki też jest zbiór B. Należy pokazać, że B ma miarę Lebesgue'a równą zero. Dla dowodu nie wprost, załóżmy że $|B| > 0$. Ponieważ również E ma miarę Lebesgue'a większą od zera, z twierdzenia Steinhausa wynika, że zbiór $E - B$ zawiera przedział:

$$(a, b) \subset E - B.$$

Zatem również

$$D + (a, b) \subset D + (E - B) = (D + E) - B = A - B.$$

Wobec tego $\mathbb{R} = A - B$, co przecież jest niemożliwe, bo $0 \notin A - B$.
$\square$

Prawdziwe jest twierdzenie nieco sillniejsze, zwane w literaturze lematem Smítala. Orzeka ono, że jeśli tylko podzbiór osi liczbowej E ma dodatnią miarę zewnętrzną Lebesgue'a, a D jest przeliczalny i gęsty w $\mathbb{R}$, to miara wewnętrzna Lebesgue'a zbioru $\mathbb{R} \setminus (D + E)$ jest równa zero

Fakt, że dowolne $x \in (a, b)$ jest elementem zbioru $A - B$ jest równoważne stwierdzeniu, że $A \cap (B + x) \neq \emptyset$. We wszystkich znanych mi dowodach twierdzenia Steinhausa dowodzi się znacznie więcej; mianowicie, że

$$\bigwedge_{x \in (a,b)} |A \cap (B + x)| > 0.$$

Oznacza to, że każde $x \in (a, b)$ można przedstawić w postaci różnicy elementów ze zbiorów A i B, odpowiednio na bardzo wiele sposobów.

A co będzie jeśli zrezygnujemy z założenia mierzalności ?

Okazuje się, że takiego efektu nie należy oczekiwać.

Przykład 1. Niech H będzie ekstremalnie niemierzalną bazą Hamela przestrzeni $\mathbb{R}$ na ciałem $\mathbb{Q}$. Takie bazy istnieją, o czym można przeczytać w "zielonej" książce M. Kuczmy. Przypomnijmy, że zbiór $H \subset \mathbb{R}$ nazywamy ekstremalnie niemierzalnym, jeśli dla każdego przedziału (a, b) zachodzi równość $|H \cap (a, b)| \; = b - a$

Przyjmijmy $H_1 = H \cap (-\infty, 0)$, $H_2 = H \cap (0, \infty)$ i niech $E(H_1)$ i $E(H_2)$ będą przestrzeniami liniowym nad ciałem $\mathbb{Q}$ rozpiętymi odpowiednio przez zbiory H_1 i H_2. Niech $A = E(H_1)$, $B = E(H_2) \setminus \{0\}$. Oczywiście, każdy z tych zbiorów jest niemierzalny w sensie Lebesgue'a (bo zawiera podzbiór niemierzalny H_1 bądź H_2 i nie może być zbiorem miary dodatniej, bo jako zbiór zamknięty "na branie różnic" musiałby być całym zbiorem liczb rzeczywistych). Pokażemy, że przecięcie dowolnej translacji jednego z nich z drugim jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym.

Ustalmy $x = r_1 h_1 + ... + r_n h_n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\{h_1, ..., h_n\} \subset H_1$, to $A + x \subset A$ i dlatego $(A + x) \cap B = \emptyset$, a więc jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym. Załóżmy teraz, że $\{h_1, ..., h_n\} \not\subset H_1$. Wtedy x ma jedyną reprezentację postaci $x = x_1 + x_2$, gdzie $x_1 \in A,\ x_2 \in B$. Wtedy jednak $A + x = A + x_1 + x_2 \subset A + x_2$ i w konsekwencji

$$(A + x) \cap B \subset (A + x_2) \cap B = \{x_2\}.$$

. $\square$

W powyższym przykładzie zbiór B nie jest dopełnieniem zbioru A do przestrzeni $\mathbb{R}$.

Pojawia się pytanie, czy analogiczny przykład jest możliwy, gdy zbiór B jest dopełnieniem zbioru A

Nie znam odpowiedzi na to pytanie. Podamy przykład rozkładu osi liczbowej mającego nieco słabszą własność.

Przykład 2.

Niech H będzie dowolną bazą Hamela przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Ustawmy elementy bazy H w ciąg pozaskończony typu γ, gdzie γ jest najmniejszą liczbą porządkową mocy continuum. Zdefiniujmy zbiór Z następująco:

$$Z = \{x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i h_{\alpha_i};\ \ n \in \mathbb{N},\ \ r_i \in \mathbb{Q},$$

$$h_{\alpha i} \in H,\ \ i = 1, ..., n,\ \ \alpha_1 < ... < \alpha_n,\ \ r_n > 0\}\ \cup \{0\}.$$

Innymi słowy, Z składa się z tych rzeczywistych liczb, które w swoim rozwinięciu hamelowskim mają dodatni ostatni współczynnik wymierny.

Oczywiście obydwa zbiory Z i Z' są niemierzalne w sensie Lebesgue'a. Ustalmy dowolnie $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $x = 0$, lub x ma które w swoim rozwinięciu hamelowskim dodatni ostatni współczynnik wymierny, to $Z + x \subset Z$ i dlatego

$$(Z + x) \cap Z' = \emptyset.$$

Załóżmy teraz, że ostatni wymierny współczynnik w hamelowskim rozwinięciu liczby $x = r_1 h_{\alpha_1} + \ldots + r_n h_{\alpha_n}$ jest ujemny. Weźmy dowolny element
$u = \rho_1 h_{\beta_1} + \ldots + \rho_m h_{\beta_m} \in (Z + x) \cap Z', \beta_1 < \ldots < \beta_m$. Ponieważ $u \in Z'$, ostatni współczynnik β_m jest ujemny. Ponieważ $u - x \in Z$, ostatni wymierny współczynnik w rozwinięciu hamelowskim $u - x$ jest dodatni. Dlatego $\beta_m \leqslant \alpha_n$. Wobec tego

$$(Z + x) \cap Z' \subset E\Big(\bigcup_{\alpha \leqslant \alpha_n} \{h_\alpha\}\Big),$$

a ponieważ zbiór $E(\bigcup_{\alpha \leqslant \alpha_n} \{h_\alpha\})$ jest przeliczalny, zbiór $(Z + x) \cap Z'$ jest co najwyżej przeliczalny. Wykazaliśmy więc, że

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} (Z + x) \cap Z'$$

jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ