O mierzeniu ryzyka

Żywilla Fechner

Letnia Szkoła IM UŚ, Wisła, 20-24 września 2010

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

ryzyko - próba definicji

- definicja **ryzyka** - słownik języka polskiego
  1. możliwość, że coś się nie uda; też: przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny
  2. odważenie się na takie niebezpieczeństwo
- definicja "ekonomiczna" ryzyka
  1. skutki podjętych decyzji nie są znane, ale jest możliwe określenie przyszłych scenariuszy rozwoju sytuacji
  2. prawdopodobieństwa, z jakimi mogą występować poszczególne zdarzenia są znane lub możliwe do oszacowania
- **niepewność** - brak możliwości przewidywania wyników

Główne grupy miar ryzyka

1. miary zmienności

   np. średnie odchylenie bezwzględne, odchylenie standardowe, połowa rozstępu

2. miary zagrożenia

   np. VaR, (koherentne) miary ryzyka

Główne grupy miar ryzyka

1. miary zmienności

   np. średnie odchylenie bezwzględne, odchylenie standardowe, połowa rozstępu

2. miary zagrożenia

   np. VaR, (koherentne) miary ryzyka

Główne grupy miar ryzyka

1. miary zmienności

   np. średnie odchylenie bezwzględne, odchylenie standardowe, połowa rozstępu

2. miary zagrożenia

   np. VaR, (koherentne) miary ryzyka

Główne grupy miar ryzyka

1. miary zmienności

   np. średnie odchylenie bezwzględne, odchylenie standardowe, połowa rozstępu
2. miary zagrożenia

   np. VaR, (koherentne) miary ryzyka

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.

Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho \colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(*N*)

$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(*PH*)

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(*TI*)

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.
Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(N)
$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(PH)
$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(TI)
$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.

Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho \colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(N)

$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(PH)

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(TI)

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.

Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(N)

$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(PH)

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(TI)

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.

Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(N)

$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(PH)

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(TI)

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja miary ryzyka

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz przestrzeń liniową $V \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zawierająca stałe np. $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $V = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dla $p \geqslant 1$.

Miarą ryzyka nazywamy odwzorowanie $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

(N)
$$X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$$

(PH)
$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V;$$

(TI)
$$\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V.$$

W przyjętej definicji miara ryzyka ocenia wielkość możliwych strat jako wynik powyżej zera.

Definicja koherentnej i wypukłej miary ryzyka

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **koherentną miarą ryzyka**, jeżeli

(S) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą miarą ryzyka**, jeżeli

(C) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad X, Y \in V, \lambda \in [0,1]$

Definicja koherentnej i wypukłej miary ryzyka

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **koherentną miarą ryzyka**, jeżeli

(S) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą miarą ryzyka**, jeżeli

(C) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad X, Y \in V, \lambda \in [0,1]$

Definicja koherentnej i wypukłej miary ryzyka

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **koherentną miarą ryzyka**, jeżeli

(S) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą miarą ryzyka**, jeżeli

(C) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad X, Y \in V, \lambda \in [0,1]$

Definicja koherentnej i wypukłej miary ryzyka

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **koherentną miarą ryzyka**, jeżeli

(*S*) $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$

Miarę ryzyka $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą miarą ryzyka**, jeżeli

(*C*) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad X, Y \in V, \lambda \in [0,1]$

Interpretacja ekonomiczna

(N) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(TI) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(PH) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(S) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V$;
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V$.
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(N) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V$;
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(TI) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(PH) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(S) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V$.
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V$;
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V$;
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V;$
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V.$
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Interpretacja ekonomiczna

(*N*) $X \geqslant 0 \Longrightarrow \rho(X) \leqslant 0, \quad X \in V$;
dodatkowa ilość kapitału, którą powinniśmy zainwestować w bezryzykowny instrument, aby nasza pozycja nie przynosiła strat

(*TI*) $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in V$
inwestując część środków w instrument bezryzykowny ($c > 0$) zmniejszamy ryzyko inwestycji, natomiast inwestując w instrument przynoszący stratę ($c < 0$) zwiększamy ryzyko

(*PH*) $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \lambda \geqslant 0, \quad X \in V$
ryzyko portfela złożonego z n takich samych instrumentów jest równe n-krotności ryzyka pojedynczego instrumentu

(*S*) $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y), \quad X, Y \in V$.
ryzyko inwestycji jest nie większe od sumy ryzyk wchodzących w skład portfela

Miary ryzyka na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przyjmijmy $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Niech

$$\mathcal{P} \subset \{Q\colon \mathcal{F} \to [0,1] : Q - \text{ miara } \wedge Q \ll \mathbb{P}\}$$

będzie niepustym zbiorem wypukłym.

Z tw. Radona-Nikodyma możemy założyć, że $\mathcal{P}$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Funkcja $\rho_{\mathcal{P}}\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup\{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\} \qquad (1)$$

jest koherentną miarą ryzyka.

Miary ryzyka na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przyjmijmy $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Niech

$$\mathcal{P} \subset \{Q \colon \mathcal{F} \to [0,1] : Q - \text{ miara } \wedge Q \ll \mathbb{P}\}$$

będzie niepustym zbiorem wypukłym.

Z tw. Radona-Nikodyma możemy założyć, że $\mathcal{P}$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Funkcja $\rho_\mathcal{P} \colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\rho_\mathcal{P}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\} \tag{1}$$

jest koherentną miarą ryzyka.

Miary ryzyka na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przyjmijmy $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Niech

$$\mathcal{P} \subset \{Q \colon \mathcal{F} \to [0,1] : Q - \text{ miara } \wedge Q \ll \mathbb{P}\}$$

będzie niepustym zbiorem wypukłym.

Z tw. Radona-Nikodyma możemy założyć, że $\mathcal{P}$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Funkcja $\rho_{\mathcal{P}} \colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\} \tag{1}$$

jest koherentą miarą ryzyka.

Miary ryzyka na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przyjmijmy $V = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Niech

$$\mathcal{P} \subset \{Q\colon \mathcal{F} \to [0,1] : Q - \text{ miara } \wedge Q \ll \mathbb{P}\}$$

będzie niepustym zbiorem wypukłym.

Z tw. Radona-Nikodyma możemy założyć, że $\mathcal{P}$ jest wypukłym podzbiorem przestrzeni $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Funkcja $\rho_{\mathcal{P}}\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\} \tag{1}$$

jest koherentą miarą ryzyka.

Własność Fatou

$\rho_{\mathcal{P}}$ spełnia dodatkowo własność Fatou, tzn.

jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek $\|X_n\|_\infty \leqslant 1$ zachodzi

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \rho_{\mathcal{P}}(X_n).$$

lub równoważnie:

$$0 \leqslant X_n \leqslant 1 \quad X_n \downarrow 0 \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X_n) \uparrow 0$$

Własność Fatou

$\rho_{\mathcal{P}}$ spełnia dodatkowo własność Fatou, tzn.

jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek $\|X_n\|_\infty \leqslant 1$ zachodzi

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \rho_{\mathcal{P}}(X_n).$$

lub równoważnie:

$$0 \leqslant X_n \leqslant 1 \quad X_n \downarrow 0 \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X_n) \uparrow 0$$

Własność Fatou

$\rho_{\mathcal{P}}$ spełnia dodatkowo własność Fatou, tzn.

jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek $\|X_n\|_\infty \leqslant 1$ zachodzi

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \rho_{\mathcal{P}}(X_n).$$

lub równoważnie:

$$0 \leqslant X_n \leqslant 1 \quad X_n \downarrow 0 \Longrightarrow \rho_{\mathcal{P}}(X_n) \uparrow 0$$

Koherentne miary ryzyka na przestrzeni $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Dowolna koherentna miara ryzyka mająca własność Fatou jest postaci (1) tzn.

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\}$$

Dla dowolnej koherentnej miary ryzyka ρ niech $\mathcal{A} := \{X : \rho(X) \leqslant 0\}$, $\mathcal{A}$ jest stożkiem wypukłym

Koherentne miary ryzyka na przestrzeni $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Dowolna koherentna miara ryzyka mająca własność Fatou jest postaci (1) tzn.

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\}$$

Dla dowolnej koherentnej miary ryzyka ρ niech $\mathcal{A} := \{X : \rho(X) \leqslant 0\}$, $\mathcal{A}$ jest stożkiem wypukłym

Koherentne miary ryzyka na przestrzeni $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Dowolna koherentna miara ryzyka mająca własność Fatou jest postaci (1) tzn.

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\}$$

Dla dowolnej koherentnej miary ryzyka ρ niech $\mathcal{A} := \{X : \rho(X) \leqslant 0\}$, $\mathcal{A}$ jest stożkiem wypukłym

Koherentne miary ryzyka na przestrzeni $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Dowolna koherentna miara ryzyka mająca własność Fatou jest postaci (1) tzn.

$$\rho_{\mathcal{P}}(X) := \sup \{\mathbb{E}_Q[-X] : Q \in \mathcal{P}\}$$

Dla dowolnej koherentnej miary ryzyka ρ niech $\mathcal{A} := \{X : \rho(X) \leqslant 0\}$, $\mathcal{A}$ jest stożkiem wypukłym

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*, to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*;*
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$*;*
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha>0}\exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$*.*

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*, to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*, to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*;*
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$*;*
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha>0}\exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$*.*

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*, to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*, to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*;*
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$*;*
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha > 0} \exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$*.*

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*, to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, *to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$;
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$;
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha>0} \exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$.

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$, *to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, *to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$;
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$;
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha>0}\exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$.

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$, *to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

Jeśli koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*, to*

1. $\mathcal{A}$ *jest domkniety w topologii* $*$*-słabej oraz* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*;*
2. $\rho(X) = \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$*;*
3. $\mathcal{A} = \{X : \exists_{\alpha > 0} \exists_Y \rho(Y) = 0 \wedge X = Y + \alpha\}$*.*

Na odwrót, jeżeli $\mathcal{A}$ *jest wypukłym stożkiem* $*$ *- słabo domkniętym i* $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$*, to funkcja* $\tilde{\rho}\colon L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\tilde{\rho}(X) := \inf\{\alpha : X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

jest koherentną miarą ryzyka mającą własność Fatou.

Wnioski

Ustaliliśmy 1-1 odpowiedniość między

- wypukłymi i domkniętymi zbiorami $\mathcal{P}$ prawdopodobieństw, które są absolutnie ciągłe względem $\mathbb{P}$
- $*$-słabo domkniętymi i wypukłymi stożkami $\mathcal{A}$ zawierającymi $L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$
- koherentnymi miarami ryzyka ρ które mają własność Fatou

Wnioski

Ustaliliśmy 1-1 odpowiedniość między

- wypukłymi i domkniętymi zbiorami $\mathcal{P}$ prawdopodobieństw, które są absolutnie ciągłe względem $\mathbb{P}$
- $*$-słabo domkniętymi i wypukłymi stożkami $\mathcal{A}$ zawierającymi $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$
- koherentnymi miarami ryzyka ρ które mają własność Fatou

Wnioski

Ustaliliśmy 1-1 odpowiedniość między

- wypukłymi i domkniętymi zbiorami $\mathcal{P}$ prawdopodobieństw, które są absolutnie ciągłe względem $\mathbb{P}$
- $*$-słabo domkniętymi i wypukłymi stożkami $\mathcal{A}$ zawierającymi $L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$
- koherentnymi miarami ryzyka ρ które mają własność Fatou

Wnioski

Ustaliliśmy 1-1 odpowiedniość między

- wypukłymi i domkniętymi zbiorami $\mathcal{P}$ prawdopodobieństw, które są absolutnie ciągłe względem $\mathbb{P}$
- $*$-słabo domkniętymi i wypukłymi stożkami $\mathcal{A}$ zawierającymi $L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$
- koherentnymi miarami ryzyka ρ które mają własność Fatou

Twierdzenie (Delbaen, [2])

$\mathcal{P}$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ istnieje taka miara $Q \in \mathcal{P}$, że $\rho(X) = Q[-X]$

Oznacza to, że we wzorze (1) możemy supremum zastąpić maksimum.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

$\mathcal{P}$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ istnieje taka miara $Q \in \mathcal{P}$, że $\rho(X) = Q[-X]$

Oznacza to, że we wzorze (1) możemy supremum zastąpić maksimum.

Twierdzenie (Delbaen, [2])

$\mathcal{P}$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ istnieje taka miara $Q \in \mathcal{P}$, że $\rho(X) = Q[-X]$

Oznacza to, że we wzorze (1) możemy supremum zastąpić maksimum.

Przykład stosowany w praktyce-VaR

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, $\alpha \in (0, 1)$. Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) nazywamy funkcję $\mathrm{VaR} : L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha^+(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leqslant x) > \alpha\}.$$

VaR możemy interpretować jako dodatkową ilość kapitału, który firma potrzebuje aby zredukować prawdopodobieństwo bankrutctwa do poziomu α.

Dla ustalonego poziomu α pozycję definiujemy jako dopuszczalną, jeżeli prawdopodobieństwo bankructwa jest mniejsze niż α.

Przykład stosowany w praktyce-VaR

Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, $\alpha \in (0,1)$.
Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) nazywamy funkcję $\mathrm{VaR}\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha^+(X) = -\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leqslant x) > \alpha\right\}.$$

VaR możemy interpretować jako dodatkową ilość kapitału, który firma potrzebuje aby zredukować prawdopodobieństwo bankrutctwa do poziomu α.

Dla ustalonego poziomu α pozycję definiujemy jako dopuszczalną, jeżeli prawdopodobieństwo bankructwa jest mniejsze niż α.

Przykład stosowany w praktyce-VaR

Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, $\alpha \in (0, 1)$.
Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) nazywamy funkcję $\mathrm{VaR}\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha^+(X) = -\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leqslant x) > \alpha\right\}.$$

VaR możemy interpretować jako dodatkową ilość kapitału, który firma potrzebuje aby zredukować prawdopodobieństwo bankrutctwa do poziomu α.
Dla ustalonego poziomu α pozycję definiujemy jako dopuszczalną, jeżeli prawdopodobieństwo bankructwa jest mniejsze niż α.

Przykład stosowany w praktyce-VaR

Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, $\alpha \in (0,1)$. Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) nazywamy funkcję $\mathrm{VaR}\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha^+(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leqslant x) > \alpha\}.$$

VaR możemy interpretować jako dodatkową ilość kapitału, który firma potrzebuje aby zredukować prawdopodobieństwo bankrutctwa do poziomu α.

Dla ustalonego poziomu α pozycję definiujemy jako dopuszczalną, jeżeli prawdopodobieństwo bankructwa jest mniejsze niż α.

Przykład stosowany w praktyce-VaR

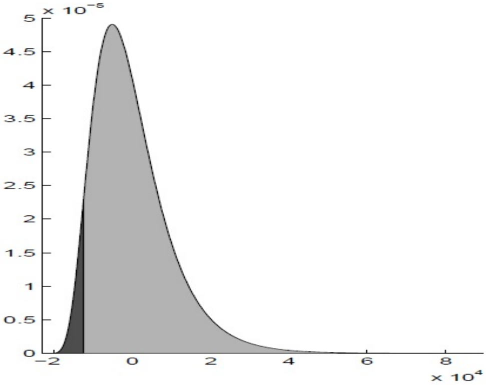
Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, $\alpha \in (0, 1)$. Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) nazywamy funkcję $\mathrm{VaR}\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha^+(X) = -\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leqslant x) > \alpha\right\}.$$

VaR możemy interpretować jako dodatkową ilość kapitału, który firma potrzebuje aby zredukować prawdopodobieństwo bankrutctwa do poziomu α.

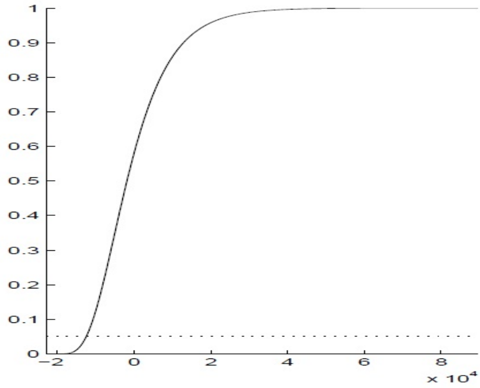
Dla ustalonego poziomu α pozycję definiujemy jako dopuszczalną, jeżeli prawdopodobieństwo bankructwa jest mniejsze niż α.

VaR odczytany z wykresu gęstości



Rysunek: Wyznaczenie $\mathrm{VaR}_{5\%}(X) \approx 12\,500$

VaR odczytany z wykresu dystrybuanty



Rysunek: Wyznaczenie $\mathrm{VaR}_{5\%}(X) \approx 12\,500$

VaR

VaR jest przykładem miary ryzyka, która nie jest koherentna.

Ale:

Twierdzenie (J. Jakubowski, [3])

Jeżeli łączny rozkład (X, Y) jest eliptyczny i niezdegenerowany oraz prawostronna pochodna w zerze funkcji generującej ten rozkład eliptyczny istnieje i jest skończona, to dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ zachodzi zależność

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X + Y) \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

VaR

VaR jest przykładem miary ryzyka, która nie jest koherentna.

Ale:

Twierdzenie (J. Jakubowski, [3])

Jeżeli łączny rozkład (X, Y) jest eliptyczny i niezdegenerowany oraz prawostronna pochodna w zerze funkcji generującej ten rozkład eliptyczny istnieje i jest skończona, to dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ zachodzi zależność

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

VaR

VaR jest przykładem miary ryzyka, która nie jest koherentna.

Ale:

Twierdzenie (J. Jakubowski, [3])

Jeżeli łączny rozkład (X, Y) jest eliptyczny i niezdegenerowany oraz prawostronna pochodna w zerze funkcji generującej ten rozkład eliptyczny istnieje i jest skończona, to dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ zachodzi zależność

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X+Y) \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

VaR

VaR jest przykładem miary ryzyka, która nie jest koherentna.

Ale:

Twierdzenie (J. Jakubowski, [3])

Jeżeli łączny rozkład (X, Y) jest eliptyczny i niezdegenerowany oraz prawostronna pochodna w zerze funkcji generującej ten rozkład eliptyczny istnieje i jest skończona, to dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ zachodzi zależność

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X + Y) \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ma ciągły rozkład oraz $\alpha = \frac{1}{k}$, to przyjmując $\mathcal{P}_k = \left\{ Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k \right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ jest miarą bezatomową, to dla każdego $\alpha \in (0, 1)$ mamy

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf \{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\}$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz* $\alpha = \frac{1}{k}$, *to przyjmując* $\mathcal{P}_k = \left\{Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k\right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ *jest miarą bezatomową, to dla każdego* $\alpha \in (0,1)$ *mamy*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\}$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz* $\alpha = \frac{1}{k}$, *to przyjmując* $\mathcal{P}_k = \left\{ Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k \right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ *jest miarą bezatomową, to dla każdego* $\alpha \in (0,1)$ *mamy*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\left\{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\right\}$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz* $\alpha = \frac{1}{k}$, *to przyjmując* $\mathcal{P}_k = \left\{ Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k \right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ *jest miarą bezatomową, to dla każdego* $\alpha \in (0,1)$ *mamy*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf \{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\}$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz* $\alpha = \frac{1}{k}$*, to przyjmując* $\mathcal{P}_k = \left\{Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k\right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ *jest miarą bezatomową, to dla każdego* $\alpha \in (0,1)$ *mamy*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\}$$

Związek z koherentnymi miarami ryzyka postaci (1)

Twierdzenie (Delbaen)

Jeżeli zmienna losowa $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ma ciągły rozkład oraz* $\alpha = \frac{1}{k}$, *to przyjmując* $\mathcal{P}_k = \left\{Q : \frac{d\mathbb{P}}{dQ} \leqslant k\right\}$

$$\rho_{\mathcal{P}_k}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X : X \leqslant -q_\alpha(X)] \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Jeżeli $\mathbb{P}$ *jest miarą bezatomową, to dla każdego* $\alpha \in (0,1)$ *mamy*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) : \rho \geqslant \mathrm{VaR}_\alpha\}$$

Miary ryzyka na przestrzeni $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Twierdzenie (Delbaen,[2])

*Jeżeli $\mathbb{P}$ jest miarą bezatomową, to **nie** istnieje koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*

Miary ryzyka na przestrzeni $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Twierdzenie (Delbaen,[2])

*Jeżeli $\mathbb{P}$ jest miarą bezatomową, to **nie** istnieje koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*

Miary ryzyka na przestrzeni $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Twierdzenie (Delbaen,[2])

*Jeżeli $\mathbb{P}$ jest miarą bezatomową, to **nie** istnieje koherentna miara ryzyka $\rho \colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*

Miary ryzyka na przestrzeni $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Twierdzenie (Delbaen,[2])

*Jeżeli $\mathbb{P}$ jest miarą bezatomową, to **nie** istnieje koherentna miara ryzyka $\rho\colon L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$*

Bibliografia

[1.] PH. ARTZNER. F. DELBAEN, J.M. EBER, D. HEATH, *Coherent measure of risk*, Mathematical Finance, 1999, 203-228

[2.] F. DELBAEN, *Coherent risk measures on general probability spaces*, Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann, 2002, 1-38

[3.] J. JAKUBOWSKI, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, 2006

Bibliografia

- [1.] PH. ARTZNER. F. DELBAEN, J.M. EBER, D. HEATH, *Coherent measure of risk*, Mathematical Finance, 1999, 203-228
- [2.] F. DELBAEN, *Coherent risk measures on general probability spaces*, Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann, 2002, 1-38
- [3.] J. JAKUBOWSKI, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, 2006

Bibliografia

- [1.] PH. ARTZNER. F. DELBAEN, J.M. EBER, D. HEATH, *Coherent measure of risk*, Mathematical Finance, 1999, 203-228
- [2.] F. DELBAEN, *Coherent risk measures on general probability spaces*, Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann, 2002, 1-38
- [3.] J. JAKUBOWSKI, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, 2006