Twierdzenie Hilberta o nieujemnie określonych formach ternarnych stopnia 4

Andrzej Sładek, Instytut Matematyki UŚl
sladek@math.us.edu.pl

Letnia Szkoła Instytutu Matematyki

20-23 września 2010

Hilbert, D., ***Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.*** **Math. Ann. 32, 342-350 (1888).**

***

Twierdzenie Nieujemnie określona forma ternarna stopnia 4 nad ciałem liczb rzeczywistych jest sumą trzech kwadratów form kwadratowych.

17 Problem Hilberta

$$f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n],\ f \geqslant 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \implies f \in \sum \mathbb{R}(X_1, ..., X_n)^2.$$

Pozytywne rozwiązanie: E.Artin (1927)

***

Nasuwają się dwa pytania:

1. Co można powiedzieć o liczbie kwadratów w przedstawieniu wielomianu nieujemnie określonego jako sumy kwadratów funkcji wymiernych?

2. Czy funkcje wymierne można zastąpić wielomianami?

***

ad 1. (A.Pfister (1967))

$$f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n],\ f \geqslant 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \implies \underset{h_1,...,h_{2^n} \in \mathbb{R}(X_1,...,X_n)}{\exists} f = h_1^2 + ... + h_{2^n}^2$$

Wielomiany można zastąpić formami

Formy		**Wielomiany**
$F(X_1, ...X_n)$	$\xrightarrow{\text{dehomogenizacja}}$	$F(X_1, ..., X_{n-1}, 1)$
$X_n^d f(\frac{X_1}{X_n}, ..., \frac{X_{n-1}}{X_n})$	$\xleftarrow{\text{homogenizacja}}$	$f(X_1, ..., X_{n-1})$

ad 2. (T.S.Motzkin (1967))
Forma

$$h(X,Y,Z)=Z^6+X^4Y^2+X^2Y^4-3X^2Y^2Z^2\in\mathbb{R}[X,Y,Z]$$

jest nieujemnie określona, ale nie jest sumą kwadratów form.
Podobnie jest dla formy (R.M.Robinson)

$$g(X,Y,Z,W)=W^4+X^2Y^2+Y^2Z^2+X^2Z^2-4XYZW\in\mathbb{R}[X,Y,Z,W]$$

***

tw. Hilberta + modyfikacje przykładów Motzkina oraz Robinsona

$$\Downarrow$$

Twierdzenie
Każda nieujemnie określona forma $F\in\mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ stopnia d jest sumą kwadratów form wtedy i tylko wtedy, gdy $n\leqslant 2$ lub $d=2$ lub $n=3, d=4$.

Hilbert, D., ***Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.*** **Math. Ann. 32, 342-350 (1888).**

$***$

Twierdzenie Nieujemnie określona forma ternarna stopnia 4 nad ciałem liczb rzeczywistych jest sumą trzech kwadratów form kwadratowych.

Swan, R.,*Hilbert's theorem on positive ternary quartics.* Contemp. Math. 272, 287-292 (2000).

In his great paper ... *D. Hilbert* proved ... The present paper gives a modern proof following the lines of Hilbert's arguments. The basic idea can be outlined easily: Ternary quartics are linear combinations of 15 monomials, hence the set of ternary quartics is identified with the projective spaces $P^{14}(\mathbb{R})$. The positive definite ternary quartics form a subset, say U, of this projective space. Similarly, a quadratic form is a linear combination of 6 monomials so that the set of triples $[f, g, h]$ of quadratic forms can be identified with the projective space $P^{17}(\mathbb{R})$. The image of the map

$$P^{17}(\mathbb{R}) \to P^{14}(\mathbb{R}) : [f, g, h] \to f^2 + g^2 + h^2$$

is clearly contained in U. The proof shows that the image is actually equal to U. [N.Schwartz (Passau)]

Rudin, W.,*Sums of squares of polynomials.* Am. Math. Mon. 107, No.9, 813-821 (2000).

This nicely written paper contains proofs for some main results about the representation of positive semidefinite polynomials over $\mathbb{R}$ as sums of squares of polynomials. ... The main part of the paper is a detailed proof of Hilbert's theorem for the exceptional case $n = 2$, $d = 4$ where P has a representation as a sum of 3 squares (of polynomials of degree $\leqslant 2$). This proof makes use of the Federer-Sard theorem from real analysis. ... [A.Pfister (Mainz)]

Choi, M-D.; Lam, T.Y., *Extremal positive semidefinite forms.* Math. Ann. 231, 1-18 (1977).

***

Pfister, A.,*On Hilbert's theorem about ternary quartics.* Contemporary Mathematics 344, 295-301 (2004).

Oznaczenia:

$\mathcal{F}_{n,d}$ - zbiór form stopnia d i n zmiennych nad $\mathbb{R}$.

$\mathcal{P}_{n,d} = \{F \in \mathcal{F}_{n,d} : F \geqslant 0\}$

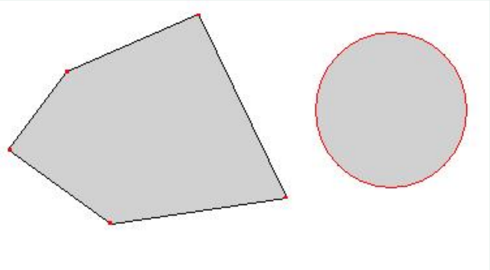
$\Sigma_{n,d} = \{F \in \mathcal{F}_{n,d} : F \in \sum (\mathcal{F}_{n,d/2})^2\}$

Fakty:

- $\Sigma_{n,d} \subseteq \mathcal{P}_{n,d}$, tw. Hilberta $\Longrightarrow \Sigma_{3,4} = \mathcal{P}_{3,4}$.
- $\mathcal{P}_{n,d}$ oraz $\Sigma_{n,d}$ są stożkami dodatnimi w $\mathcal{F}_{n,d}$
- $\mathcal{F}_{n,d} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, gdzie $N = \binom{n+d-1}{n-1}$
- $\mathcal{P}_{n,d}$ oraz $\Sigma_{n,d}$ są podzbiorami domkniętymi i wypukłymi $\mathbb{R}^N$.

Definicja Niech X będzie podzbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem ekstremalnym*, jeśli spełniony jest warunek:

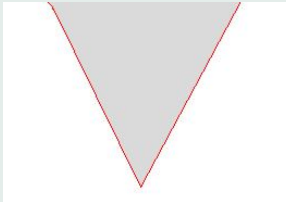
$$\forall_{y,z \in X} \ (x = \lambda y + (1-\lambda)z, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \implies x = y \text{ lub } x = z).$$



Twierdzenie Kreina-Milmana Jeśli X jest zwartym i wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, to X jest otoczką wypukłą zbioru swoich punktów ekstremalnych.

Niech K będzie stożkiem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Dla $x \in K$ zbiór $\bar{x} = \{\lambda x : \lambda > 0\}$ nazywamy *promieniem*. Promień $\bar{x}, x \in K$, nazywamy *promieniem ekstremalnym*, jeśli spełniony jest warunek:

$$\underset{y,z \in K}{\forall} \Big(\underset{0<\lambda<1}{\exists} \lambda y + (1-\lambda) z \in \bar{x} \implies y, z \in \bar{x} \Big).$$



Wniosek *(R. T. Rockafellar, Complex analysis, Cor. 18.5.2)*
Let K be a closed convex cone containing more than just origin but containing no lines. Let T be any set of vectors in K such that each extreme ray of K is generated by some $x \in T$. Then K is the convex cone generated by T.

Choi, M-D.; Lam, T.Y., *Extremal positive semidefinite forms.*

Definicja Formę $F \in \mathcal{P}_{n,d}$ nazywamy *ekstremalną*, jeśli

$$G_1, G_2 \in \mathcal{P}_{n,d},\ F = G_1 + G_2 \implies \exists_{a_1,a_2>0}\, G_1 = a_1 F,\ G_2 = a_2 F.$$

Uwaga $F \in \mathcal{P}_{n,d}$ jest ekstremalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formy $G \in \mathcal{P}_{n,d}$, $\operatorname{st} G = \operatorname{st} F$ spełniony jest warunek

$$F \geqslant G \implies \exists_{a>0}\, F = aG.$$

Lemat Jeśli $T(X,Y,Z) \in \mathcal{P}_{3,4}$, to istnieje forma kwadratowa $G(X,Y,Z) \neq 0$ taka, że $T \geqslant G^2$.

Wniosek Jeśli $T(X,Y,Z) \in \mathcal{P}_{3,4}$ jest ekstremalna, to istnieje forma kwadratowa $G(X,Y,Z) \neq 0$ oraz $a \in \mathbb{R}^*$ takie, że $T = (aG)^2$.

Twierdzenie Każda nieujemnie określona forma stopnia 4, trzech zmiennych (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest sumą kwadratów pewnych form kwadratowych.

Dowód. Z Wniosku do twierdzenia Kreina-Milmana mamy

$$T = T_1 + ... + T_s,$$

gdzie T_i dla $i = 1, ..., s$ są formami ekstremalnymi.
Z poprzedniego wniosku dla każdego i istnieje forma kwadratowa G_i taka, że

$$T_i = (a_i G_i)^2$$

dla pewnego $a_i \in \mathbb{R}^*$. Wtedy

$$T = (a_1 G_1)^2 + ... + (a_s G_s)^2. \quad ¶$$

Kilka uwag o dowodzie Lematu.

Rozważymy trzy przypadki ze względu na liczbę miejsc zerowych $\mathcal{Z}(T)$ formy T.

Przypadek 1. $|\mathcal{Z}(T)| = 0.$ Wtedy

$$T(X,Y,Z) \geqslant (\sqrt{\varepsilon}(X^2+Y^2+Z^2))^2,$$

gdzie $\varepsilon = \inf\{T(x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^2 : (x,y,z) \in S^2\}$.

Przypadek 2. $|\mathcal{Z}(T)| = 1.$

Po zamianie zmiennych $\mathcal{Z}(T) = \{(1:0:0)\}$ i wtedy

$$T(X,Y,Z) = X^2G_2(Y,Z) + 2XG_1(Y,Z) + G_0(Y,Z)$$

i formy G_2, G_0 oraz $G_2G_0 - G_1^2$ są nieujemnie określone.

Rozważymy teraz dwa podprzypadki ze względu na rząd formy kwadratowej $G_2(Y, Z)$.

(2a). Rząd formy G_2 jest równy 1.

Wtedy $G_2 = F^2$, F- forma liniowa.

$$G_2G_0 - G_1^2 = F^2G_0 - G_1^2 \geqslant 0 \qquad \Downarrow$$

$$F(x, y, z) = 0 \implies G_1(x, y, z) = 0 \quad \Downarrow$$

$$G_1 = FF_1,\ F_1 - \text{forma kwadratowa.}$$

Zatem $G_2T =$

$$(XG_2+G_1)^2+(G_2G_0-G_1^2) \geqslant (XG_2+G_1)^2 = (XG_2+FF_1)^2 = G_2(XF+F_1)^2.$$

Stąd

$$T \geqslant (XF + F_1)^2.$$

(2b). Rząd formy G_2 jest równy 2.

Wtedy $G_2 > 0,\ G_2G_0 - G_1^2 > 0$ oraz $T \geqslant (\sqrt{\varepsilon}G_2)^2$,

gdzie $\varepsilon > 0$ takie, że $(G_2G_0 - G_1^2)/G_2^3 \geqslant \varepsilon$.

Przypadek 3. $|\mathcal{Z}(T)| \geqslant 2$.

Po zamianie zmiennych $(1:0:0), (0:1:0) \in \mathcal{Z}(T)$. Wtedy

$$T(X,Y,Z) = X^2G_2(Y,Z) + 2XZH_1(Y,Z) + Z^2H_0(Y,Z)$$

oraz $\quad G_2T = (XG_2 + ZH_1)^2 + Z^2(G_2H_0 - H_1^2)$

i formy G_2, H_0 oraz $G_2H_0 - H_1^2$ są nieujemnie określone.

Pozostają przypadki:
(3a). $G_2H_0 - H_1^2$ ma nietrywialne zero, $\quad$ (3b). $G_2H_0 - H_1^2 > 0$. ¶

Pfister, A.,*On Hilbert's theorem about ternary quartics.* Contemporary Mathematics 344, 295-301 (2004).

Twierdzenie (A.Pfister, 2004) Jeżeli $T = T(X, Y, Z) \in \mathcal{P}_{3,4}$, to T jest sumą 4 kwadratów w $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

Lemat

Jeśli wielomian

$$g(X, Y) = X^2 g_2(Y) + 2X g_1(Y) + g_0(Y) \in \mathbb{R}[X, Y], \quad \mathrm{st} g_i \leqslant 4 - i$$

jest nieujemnie określony, to

$$g_2 \geqslant 0, \quad g_0 \geqslant 0, \quad g_2 g_0 - g_1^2 \geqslant 0$$

oraz g jest sumą trzech kwadratów w $\mathbb{R}[X, Y]$.

Twierdzenie (A.Pfister, 2004) Jeżeli $T = T(X, Y, Z) \in \mathcal{P}_{3,4}$, to T jest sumą 4 kwadratów w $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

Dowód. Niech

$$m = \min\{\frac{T(X,Y,Z)}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}; (X,Y,Z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3\} \geqslant 0.$$

Można założyć $T(1, 0, 0) = m$ (ortogonalna zamiana zmiennych)
Wtedy

$$G(X,Y,Z) := T(X,Y,Z) - m(X^2+Y^2+Z^2)^2 \geqslant 0 \text{ oraz } G(1,0,0) = 0.$$

Wtedy

$$G = X^2 G_2(Y,Z) + 2XG_1(Y,Z) + G_0(Y,Z)$$

oraz

$$G_2 \geqslant 0,\ G_0 \geqslant 0,\ G_2G_0 - G_1^2 \geqslant 0.$$

Wystarczy pokazać, że

$$t(X,Y) = T(X,Y,1) = g(X,Y) + m(X^2+Y^2+1)^2,$$

gdzie $g(X,Y) = G(X,Y,1)$, jest sumą czterech kwadratów.
To jednak wynika z lematu , gdyż

$$g(X,Y) = X^2 g_2(Y) + 2X g_1(Y) + g_0(Y),$$

gdzie $g_i(Y) = G_i(Y,1), i = 0,1,2,$
jest sumą trzech kwadratów. ¶

Wniosek Jeżeli $T = T(X,Y,Z) \in \mathcal{P}_{3,4}$ posiada nietrywialne zero, to T jest suma trzech kwadratów w $\mathbb{R}[X,Y,Z]$.

Joint Conferences on Algebra, Logic And Number Theory

9th Colloquiumfest on Algebra and Logic
8th Czech, Polish and Slovak Conference on Number Theory

Bukowina Tatrzańska, 21—24.06.2010

AN ELEMENTARY CONSTRUCTIVE PROOF OF HILBERT'S THEOREM ON TERNARY QUARTICS

Albrecht Pfister
(Mathematisches Institut der Universität Mainz, Mainz)

I report on joint work with Claus Scheiderer (Konstanz). Hilbert's Theorem states that every positive semi-definite (psd) form F of degree 4 in 3 variables over the reals is a sum of 3 squares (of quadratic forms). We start from two results which were obtained several years ago by Powers-Reznick resp. by myself:

1. If F is positive definite (pd) then F is a sum of 3 squares iff a certain cubic equation E corresponding to F has a suitable integral solution
2. If F is semi-definite (sd) with a nontrivial real zero then F is always a sum of 3 squares

Our method is now as follows: For a given pd form F we construct a family F_t depending continuously on a real parameter t with $0 \leq t \leq 1$ and the corresponding equation E_t such that F_0 is sd and $F_1 = F$. For increasing value of t we show with the Implicit Function Theorem (IFT) that any admissible solution of E_t for fixed t can be extended uniquely to a solution of E'_t if $|t' - t|$ is small enough. Finally we get a solution of E_1 which gives the desired result. In order to apply IFT we have to exclude a finite number of rather explicite "special cases for F" where the full rank condition of IFT could fail. In these cases the proof is finished by an easy limit argument (already used by Hilbert).

AN ELEMENTARY PROOF OF HILBERT'S THEOREM ON TERNARY QUARTICS

ALBRECHT PFISTER AND CLAUS SCHEIDERER

Abstract. In 1888, Hilbert proved that every nonnegative quartic form $f = f(x, y, z)$ with real coefficients is a sum of three squares of quadratic forms. His proof was ahead of its time and used advanced methods from topology and algebraic geometry. Up to now, no elementary proof is known. Here we present a completely new approach. Although our proof is not easy, it uses only elementary techniques. As a by-product, it gives information on the number of representations $f = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ of f up to orthogonal equivalence. We show that this number is 8 for generically chosen f, and that it is 4 when f is chosen generically with a real zero. Although these facts were known, there was no elementary approach to them so far.

Introduction

In 1888, David Hilbert published an influential paper [3] which became fundamental for real algebraic geometry, and which remains an inspiring source for research even today. It addresses the problem whether a real form (homogeneous polynomial) $f(x_0, \dots, x_n)$ which takes nonnegative values on all of $\mathbb{R}^{n+1}$ is necessarily a sum of squares of real forms. Hilbert proves that the answer is negative in general. As is well-known, his results go much beyond this fact and contain a surprising positive aspect as well. Namely, for any pair (n, d) of integers with $n \geq 2$ and even $d \geq 4$, except for $(n, d) = (2, 4)$, he shows that there exists a nonnegative form of degree d in $n + 1$ variables which is not a sum of squares of polynomials. In the exceptional case, however, he proves that every nonnegative ternary quartic form is a sum of three squares of real quadratic forms.

It is the existence of a representation $f = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ in this exceptional case that is the subject of the present article. Hilbert's original proof is brief and elegant, and it is ahead of its time in its topological arguments. For his contemporaries it must have been hard to grasp. Even today it is not easy to read, and it leaves a number of details to be filled in. Several authors have given fully detailed accounts of Hilbert's proof in recent years. We mention the approach due to Cassels, published in Rajwade's book ([8] chapter 7), and the two articles by Rudin [9] and Swan [11]. These approaches also show some characteristic differences.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11E20, secondary 12D15.

http://arxiv.org/abs/1009.3144

$\heartsuit\heartsuit\heartsuit$

Dziękuję za uwagę