O pewnym twierdzeniu S. Łojasiewicza, J. Wloki, Z. Zieleżnego

Jan Ligęza

Instytut Matematyki

Wisła – *Letnia Szkoła Instytutu Matematyki* – wrzesień 2010 r.

[1] S. Łojasiewicz, J. Wloka, Z. Zieleżny; *Über eine Definition des Wertes einer Distribution*, Bull. De L'Acad. Polon. Des Sci C I, III, 3 (1955).

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions II*, Paris 1951.

[3] P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Amsterdam–Warsaw 1973, Elsevier – PWN.

Twierdzenie. $(, W, Z)$. *Każda dystrybucja okresowa (o okresie 2π) $f(x)$ jest sumą szeregu trygonometrycznego*

(1)
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + bn \sin nx),$$

(2)
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

(3)
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

lub

(1)′
$$\sum_{n\to-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gdzie

(2)′
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Rozwinięcie to jest jedyne.

Uwaga 1. Jeśli dystrybucja f jest sumą szeregu trygonometrycznego (1), to f jest dystrybucją 2π–okresową.

Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Ω – zbiór otwarty zawarty w przestrzeni euklidesowej E^n.

Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

supp f – nośnik funkcji f (zb. domknięty).

$C_0^\infty(\Omega)$ – zbiór funkcji f klasy $C^\infty(\Omega)$, których nośniki są kompaktami zawartymi w Ω.

Definicja. Funkcjonał liniowy u określony na $C_0^\infty(\Omega)$ jest dystrybucją na Ω, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kompaktu $K \subset \Omega$ warunki:

(1) $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi_j \subset K$ $(j = 1, 2, \ldots)$,

(ii) dla każdego wielowskaźnika α $\lim_{j\to\infty} D^\alpha \varphi_j = 0$ jednostajnie

na Ω pociągają za sobą zbieżność $\lim_{j\to\infty} u[\varphi_j] = 0$.

$(D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \frac{\partial}{\partial x_k} = D_k$, zbieżność jednostajna dla każdego α.)

P.1. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$,

$$u_f[\varphi] = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

P.2. $\delta_0[\varphi] = \varphi(0), \varphi \in C_0^{\infty}(E^1)$.

(nie jest regularna, delta Diraca).

Przez $D'(\Omega)$ oznaczamy zbiór wszystkich dystrybucji na Ω.

Definicja. Mówimy, że ciąg dystrybucji $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $u_m \in D'(\Omega)$ jest zbieżny, jesli dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ istnieje skończona granica

$$\lim_{m\to\infty} u_m[\varphi]. \tag{4}$$

Uwaga 2. Można pokazać, że funkcjonał

$$u[\varphi] = \lim_{m \to \infty} u_m[\varphi] \in D'(\Omega).$$

Podstawowe operacje na dystrybucjach

Z. $u_1, u_2 \in D'(\Omega)$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$; $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

1^o $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)[\varphi] = \lambda_1 u_1[\varphi] + \lambda_2 u_2[\varphi]$,

2^o $D_j u_1[\varphi] = -u_1[D_j \varphi]$,

3^o $a \cdot u_1[\varphi] = u_1[a\varphi]$, $a \in C^\infty(\Omega)$,

4^o przesunięcie dystrybucji u_1 o wektor $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$;
$(\Omega = E^n)$ nazywamy dystrybucją $\tau_\eta u_1$ określoną związkiem

$$\tau_\eta u_1[\varphi] = u_1[\tau_{-\eta}\varphi],$$

gdzie $\tau_{-\eta}\varphi(x) = \varphi(x + \eta)$.

Mówimy, że dystrybucja $u \in D'(E^n)$ jest dystrybucją okresową o okresie h, jeśli

$$\tau_h u_1 = u_1, \tag{5}$$

tzn.

$$u_1[\varphi(x+h) \ = u_1[\varphi(x)], \quad \forall_{\varphi \in C_0^\infty(E^n)}.$$

Wartości dystrybucji w punkcie (w.s. Łojasiewicza)

Definicja. Niech u będzie dystrybucją określoną w otoczeniu punktu $s^* \in E^n$. Załóżmy, że dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$ istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u\left[\frac{1}{|\varepsilon|^n}\varphi\left(\frac{s-s^*}{\varepsilon}\right)\right], \tag{6}$$

przy czym ta granica jest dystrybucją stałą, tzn.

$$c \to \int c\varphi(x)dx.$$

Nazywamy ją wówczas wartością dystrybucji w punkcie s^* i oznaczamy przez $u|_{s=s^*}$ (lub krótko $u(s^*)$).

Mamy, więc

$$u|_{s=s^*}[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} u\left[\frac{1}{|\varepsilon|^n}\varphi\left(\frac{s-s^*}{\varepsilon}\right)\right] = c\int \varphi(s)ds.$$

Uwaga 3. Dla dystrybucji $u \in D'(E^n)$ będącej funkcją ciągłą w otoczeniu punktu s^* mamy

$$u|_{s=s^*}[\varphi] = u(s^*) \int \varphi(s) ds.$$

Uwaga 4. można pokazać, że jeśli $u \in D'(\Omega)$, $\Omega \subset E^1$ i $u' = 0$, to $u = c$. (c – dystrybucja stała).

Uwaga 5. Można udowodnić, że dla każdej dystrybucji $u \in D'(\Omega)$, $\Omega \subset E^1$ istnieje dystrybucja pierwotna $U \in D'(\Omega)$, tzn. taka, że

$$U' = u. \tag{8}$$

Całka oznaczona dystrybucji

Ograniczmy się do dystrybucji $f \in D'(E^1)$.

Definicja. Niech $F \in D'(E^1), F' = f$ i $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(9) \qquad \int_a^b f(x)dx = [F(x+b) - F(x+a)]|_{x=0},$$

o ile wartość dystrybucji po prawej stronie istnieje.

Uwaga 6. Jeśli $F(b), F(a)$ istnieją (jako wartości w s. Łojasiewicza), to z (9) dostajemy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{9'}$$

(w szczególności dla F będącej funkcją ciągłą dostajemy podstawowy wzór rachunku całkowego).

Uwaga 7. $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$ istnieje dla każdej dystrybucji 2π–okresowej, bowiem

$$F(x + 2\pi) - F(x) \equiv c,$$

gdyż $F' = f$ i

$$\frac{d}{dx}[F(x + 2\pi) - F(x)] = [f(x + 2\pi) - f(x)] = 0.$$

P.3. Niech

$$\delta_{2\pi}(x) = \sum_{n \to -\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi n),$$

gdzie $\delta_a[\varphi] = \varphi(a), \varphi \in C_0^\infty(E^1)$.

Dystrybucja $\delta_{2\pi}(x)$ jest 2π–okresowa oraz

$$\delta_{2\pi}(x) = \frac{d}{dx} E\left(\frac{x}{2\pi}\right),$$

gdzie $E(\alpha)$ oznacza największą liczbę całkowitą $\leqslant \alpha$. Wtedy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_{2\pi}(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_{2\pi}(x) \sin nx dx = 0.$$

Zatem

$$\delta_{2\pi}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx + \ldots\right),$$

czyli

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + \ldots = \pi\delta_{2\pi}(x) - \frac{1}{2}.$$

[4] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite l'une distribution dans une point*, Studia Math. 16 (1957), 1–36.

[5] S. Łojasiewicz, *Sur la fixation des variables dans une distribution*, Studia Math. XVII, 1, 1958, 1–64.

Uwaga 8. Można udowodnić, że jeśli wartość dystrybucji $f(x)$ jest równa zero w każdym punkcie, to $f(x)$ jest funkcją zerową ([4]). Załóżmy, że $f(x) = 0$ w każdym punkcie jest istotne, bowiem dystrybucja delta Diraca $\delta(x)$ ma własność, że
$\delta(x) = 0$ dla $x \neq 0$ i $\delta(0)$ nie istnieje, a δ nie jest dystrybucją zerową.

Konstrukcja dystrybucji pierwotnej

Niech $\varphi_0 \in C_0^\infty(E^1)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = 1$, $f \in D'(E^1)$, $F' = f$, $F = ?$

Uwaga 9. Każdą funkcję $\varphi \in C_0^\infty(E^1)$ mozna jednoznacznie rozłożyć

$$\varphi = k\varphi_0 + \xi, \quad \text{gdzie } k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt, \chi = \phi', \phi \in C_0^\infty(E^1).$$

Określamy dystrybucję pierwotną dla χ, $F[\chi] = F[-\psi]$, gdzie

$$\psi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \chi(s)ds, \quad (\psi \in C_0^\infty(E^1))$$

$$F[\varphi] = k[\varphi_0] - f[\psi] = kF[\varphi_0] + F[\chi]$$