Letnia Szkoła Instytutu Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach
20 – 23 września 2010
Wisła, Polska

Przekroje różnych klas implikacji rozmytych

Michał Baczyński

Zakład Informatyki i Matematyki Dyskretnej

Plan referatu

- **Wprowadzenie**

Plan referatu

- **Wprowadzenie**
- **Główne klasy implikacji rozmytych**

Plan referatu

- **Wprowadzenie**
- **Główne klasy implikacji rozmytych**
- **Przekroje głównych klas implikacji rozmytych**

Plan referatu

- **Wprowadzenie**
- **Główne klasy implikacji rozmytych**
- **Przekroje głównych klas implikacji rozmytych**
- **Klasy uninorm**

Plan referatu

- **Wprowadzenie**
- **Główne klasy implikacji rozmytych**
- **Przekroje głównych klas implikacji rozmytych**
- **Klasy uninorm**
- **Klasy implikacji rozmytych generowanych z uninorm**

Plan referatu

- **Wprowadzenie**
- **Główne klasy implikacji rozmytych**
- **Przekroje głównych klas implikacji rozmytych**
- **Klasy uninorm**
- **Klasy implikacji rozmytych generowanych z uninorm**
- **Przekroje powyższych klas**

1. WPROWADZENIE

- **J. Łukasiewicz (1923):** O logice trójwartościowej
- **K. Gödel (1930):** Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls
- **B. Sobociński (1936):** Axiomatization of certain many-valued systems of theory of deduction
- **J. Słupecki (1946):** The complete three-valued propositional calculus
- **H. Rasiowa (1974):** An algebraic approach to non-classical logics

1. WPROWADZENIE

- **J. Łukasiewicz (1923):** O logice trójwartościowej
- **K. Gödel (1930):** Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls
- **B. Sobociński (1936):** Axiomatization of certain many-valued systems of theory of deduction
- **J. Słupecki (1946):** The complete three-valued propositional calculus
- **H. Rasiowa (1974):** An algebraic approach to non-classical logics

Badania w kierunku rozszerzenia implikacji mogą iść w różnych kierunkach. Z jednej strony można znajdować konkretne przykłady rozszerzonego operatora implikacji i badać jego własności, z drugiej strony można podać pewne aksjomaty, które uważa sią za niezbędne własności operatora implikacji (zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia) i badać klasy funkcji spełniających te własności. Na przykład jasnym jest, że matematyczne uogólnienie implikacji powinno spełniać tabelkę zero-jedynkową:

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1, \quad I(1,0) = 0.$$

1. WPROWADZENIE

- **J. Łukasiewicz (1923):** O logice trójwartościowej
- **K. Gödel (1930):** Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls
- **B. Sobociński (1936):** Axiomatization of certain many-valued systems of theory of deduction
- **J. Słupecki (1946):** The complete three-valued propositional calculus
- **H. Rasiowa (1974):** An algebraic approach to non-classical logics

Badania w kierunku rozszerzenia implikacji mogą iść w różnych kierunkach. Z jednej strony można znajdować konkretne przykłady rozszerzonego operatora implikacji i badać jego własności, z drugiej strony można podać pewne aksjomaty, które uważa się za niezbędne własności operatora implikacji (zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia) i badać klasy funkcji spełniających te własności. Na przykład jasnym jest, że matematyczne uogólnienie implikacji powinno spełniać tabelkę zero-jedynkową:

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1, \quad I(1,0) = 0. \tag{1}$$

Moje badania koncentrują się na własnościach analitycznych i algebraicznych oraz wybranych zastosowaniach implikacji rozmytych.

J. Fodor, M. Roubens (1994): Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support

Definicja 1. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą, gdy spełnia następujące warunki:

$$I \text{ jest malejąca względem pierwszej zmiennej} \tag{I1}$$
$$I \text{ jest rosnąca względem drugiej zmiennej} \tag{I2}$$
$$I(0,0) = 1, \tag{I3}$$
$$I(1,1) = 1, \tag{I4}$$
$$I(1,0) = 0. \tag{I5}$$

J. Fodor, M. Roubens (1994): Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support

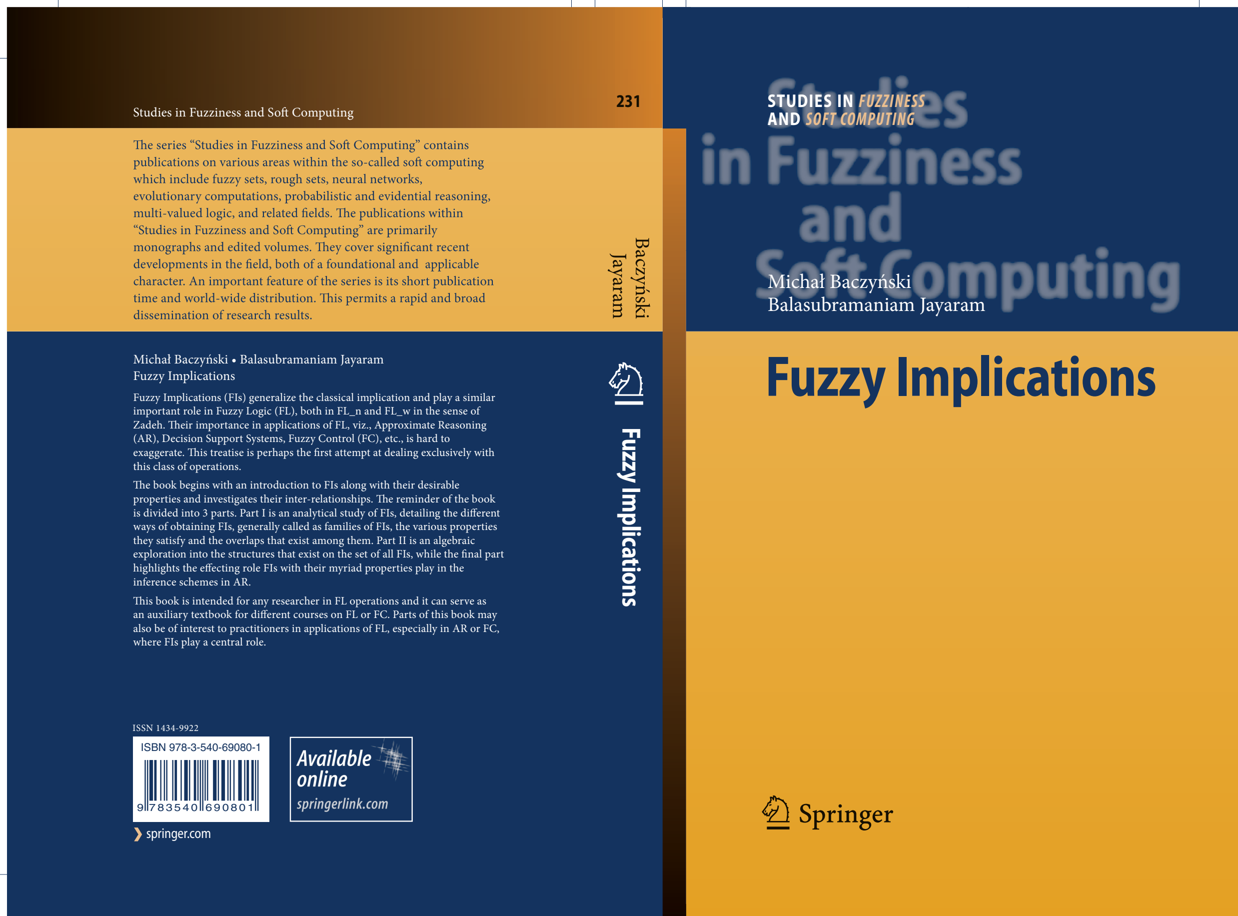
Definicja 1. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy implikacją rozmytą, gdy spełnia następujące warunki:

$$I \text{ jest malejąca względem pierwszej zmiennej} \tag{I1}$$
$$I \text{ jest rosnąca względem drugiej zmiennej} \tag{I2}$$
$$I(0,0) = 1, \tag{I3}$$
$$I(1,1) = 1, \tag{I4}$$
$$I(1,0) = 0. \tag{I5}$$

Aksjomaty (I1)–(I5) można skrócić do dwóch warunków.

> Funkcja $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ spełniająca (1) jest implikacją rozmytą wtedy i tylko wtedy, gdy I jest monotoniczna oddzielnie względem każdej zmiennej.

M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy implications (Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 231), Springer, Berlin 2008.



Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.
- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.

- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.

- Uzupełnienie wielu niedokończonych zagadnień oraz podanie nowych wyników dotyczących przede wszystkim przekroju różnych klas implikacji rozmytych.

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.

- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.

- Uzupełnienie wielu niedokończonych zagadnień oraz podanie nowych wyników dotyczących przede wszystkim przekroju różnych klas implikacji rozmytych.

- Ujednolicenie terminologii oraz symboliki.

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.
- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.
- Uzupełnienie wielu niedokończonych zagadnień oraz podanie nowych wyników dotyczących przede wszystkim przekroju różnych klas implikacji rozmytych.
- Ujednolicenie terminologii oraz symboliki.
- Wskazanie tych implikacji (lub sparametryzowanych klas), które spełniają konkretne zależności (np. prawa rozdzielności, prawa kontrapozycji, prawo idempotencji, itp.).

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.
- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.
- Uzupełnienie wielu niedokończonych zagadnień oraz podanie nowych wyników dotyczących przede wszystkim przekroju różnych klas implikacji rozmytych.
- Ujednolicenie terminologii oraz symboliki.
- Wskazanie tych implikacji (lub sparametryzowanych klas), które spełniają konkretne zależności (np. prawa rozdzielności, prawa kontrapozycji, prawo idempotencji, itp.).
- Zebranie w jednym miejscu wielu wzorów na implikacje rozmyte wraz z ich klasyfikacją i ułatwienie wyboru implikacji rozmytej osobom ze środowiska inżynierskiego.

Główne cele monografii

- Dotychczas brak było książki, która w całości poświęcona byłaby tylko implikacjom rozmytym, ich własnościom i znaczeniu w zagadnieniach praktycznych. Pierwszym celem było uzupełnienie tej luki.
- Uporządkowanie wyników, zarówno własnych jak i innych autorów, dotyczących implikacji rozmytych.
- Uzupełnienie wielu niedokończonych zagadnień oraz podanie nowych wyników dotyczących przede wszystkim przekroju różnych klas implikacji rozmytych.
- Ujednolicenie terminologii oraz symboliki.
- Wskazanie tych implikacji (lub sparametryzowanych klas), które spełniają konkretne zależności (np. prawa rozdzielności, prawa kontrapozycji, prawo idempotencji, itp.).
- Zebranie w jednym miejscu wielu wzorów na implikacje rozmyte wraz z ich klasyfikacją i ułatwienie wyboru implikacji rozmytej osobom ze środowiska inżynierskiego.
- Wyeksponowanie znaczenia wybranych wyników teoretycznych w zagadnieniach praktycznych, w tym zilustrowanie w jaki sposób znajomość rozwiązań wybranych równań i nierówności funkcyjnych związanych z implikacjami rozmytymi może pomóc w zagadnieniach informatycznych wnioskowania przybliżonego.

Układ monografii

1. An Introduction to Fuzzy Implications

I. **Analytical Study of Fuzzy Implications**

   2. Fuzzy Implications from Fuzzy Logic Operations
   3. Fuzzy Implications from Generator Functions
   4. Intersections between Families of Fuzzy Implications
   5. Fuzzy Implications from Uninorms

II. **Algebraic Study of Fuzzy Implications**

   6. Algebraic Structures of Fuzzy Implications
   7. Fuzzy Implications and Some Functional Equations

III. **Applicational Study of Fuzzy Implications**

   8. Fuzzy Implications in Approximate Reasoning

2. GŁÓWNE KLASY IMPLIKACJI ROZMYTYCH

(S,N)-implikacje

Definicja 2. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (S,N)-implikacją, jeśli istnieje taka **t-konorma** S i **negacja rozmyta** N, że

$$I(x,y) = S(N(x),y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Jeśli N jest **negacją silną**, to I jest nazywana implikacją silną lub S**-implikacją.**

$$\boxed{p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q}$$

2. GŁÓWNE KLASY IMPLIKACJI ROZMYTYCH

(S,N)-implikacje

Definicja 2. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (S,N)-implikacją, jeśli istnieje taka **t-konorma** S i **negacja rozmyta** N, że

$$I(x,y) = S(N(x), y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Jeśli N jest **negacją silną**, to I jest nazywana implikacją silną lub S-**implikacją.**

$$\boxed{p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q}$$

C. Alsina, E. Trillas (2003): When (S,N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?

M. Baczyński, B. Jayaram (2008): On the characterizations of (S,N)-implications

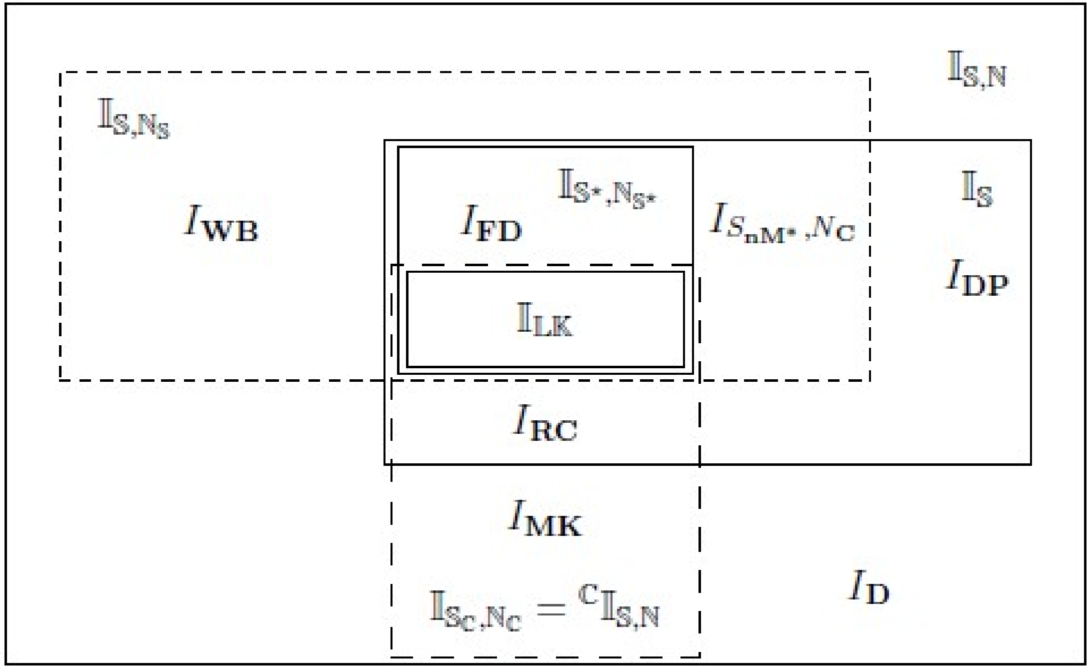
Twierdzenie 1. *Dla funkcji* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) I *jest (S,N)-implikacją generowaną z ciągłej (ścisłej, silnej) negacji rozmytej* N.

(ii) I *spełnia* (I1) *(lub* (I2)*), prawo komutacji*

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)), \qquad x,y,z \in [0,1], \tag{EP}$$

oraz funkcja $N_I(x) := I(x,0)$ *jest ciągłą (ścisłą, silną) negacją rozmytą.*



- $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$ – rodzina (S,N)-implikacji
- ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}}$ – rodzina ciągłych (S,N)-implikacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{S}_\mathbb{C},\mathbb{N}_\mathbb{C}}$ – rodzina (S,N)-implikacji generowanych z ciągłych funkcji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{S}}$ – rodzina S-implikacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{S},\mathbb{N}_\mathbb{S}}$ – rodzina (S,N)-implikacji generowanych z dowolnej t-normy oraz jej naturalnej negacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{S}^*,\mathbb{N}_\mathbb{S}^*}$ – rodzina (S,N)-implikacji gen. z dowolnej t-normy oraz jej naturalnej silnej negacji

R-implikacje

Definicja 3. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy R-implikacją, jeśli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}, \qquad x,y \in [0,1].$$

R-implikacje

Definicja 3. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy R-implikacją, jeśli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{2}$$

'R-implikacja' jest skróconą wersją 'residual implication', a samo I nazywane jest jako 'the residuum of T'. W tym kontekście definicja jest rozważana tylko dla t-norm ciągłych lewostronnie.

R-implikacje

Definicja 3. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy R-implikacją, jeśli istnieje taka t-norma T, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid T(x,t) \leqslant y\}, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{2}$$

'R-implikacja' jest skróconą wersją 'residual implication', a samo I nazywane jest jako 'the residuum of T'. W tym kontekście definicja jest rozważana tylko dla t-norm ciągłych lewostronnie.

Twierdzenie 2. *Dla t-normy T następujące warunki są równoważne:*

(i) T jest ciągła lewostronnie.

(ii) T oraz I spełniają następującą równoważność (ang. residual principle):

$$T(x,z) \leqslant y \iff I(x,y) \geqslant z, \qquad x, y, z \in [0,1]. \tag{RP}$$

(iii) Supremum w (2) staje się maksimum.

R-implikacje (kontynuacja)

M. Miyakoshi, M., Shimbo (1985): Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms

Twierdzenie 3. *Dla funkcji* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) I *jest R-implikacją generowaną z t-normy lewostronnie ciągłej.*

(ii) I *spełnia* (I2)*, prawo komutacji* (EP)*, prawo porządku*

$$I(x,y) = 1 \iff x \leqslant y, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{OP}$$

oraz I *jest prawostronnie ciągła ze względu na drugą zmienną.*

Ponadto reprezentacja R-implikacji jest jednoznaczna w tym przypadku.

R-implikacje (kontynuacja)

M. Miyakoshi, M., Shimbo (1985): Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms

Twierdzenie 3. *Dla funkcji $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest R-implikacją generowaną z t-normy lewostronnie ciągłej.

(ii) I spełnia (I2)*, prawo komutacji* (EP)*, prawo porządku*

$$I(x,y) = 1 \iff x \leqslant y, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{OP}$$

oraz I jest prawostronnie ciągła ze względu na drugą zmienną.

Ponadto reprezentacja R-implikacji jest jednoznaczna w tym przypadku.

Niezależność powyższych aksjomatów była otwartym problemem. Został on rozwiązany przez naszego studenta:
R. Łukasik (2010): A note on the mutual independence of the properties in the characterization of R-implications generated from left-continuous t-norms

R-implikacje (kontynuacja)

M. Miyakoshi, M., Shimbo (1985): Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms

Twierdzenie 3. *Dla funkcji* $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) I *jest R-implikacją generowaną z t-normy lewostronnie ciągłej.*

(ii) I *spełnia* (I2)*, prawo komutacji* (EP)*, prawo porządku*

$$I(x,y) = 1 \iff x \leqslant y, \qquad x, y \in [0,1]. \tag{OP}$$

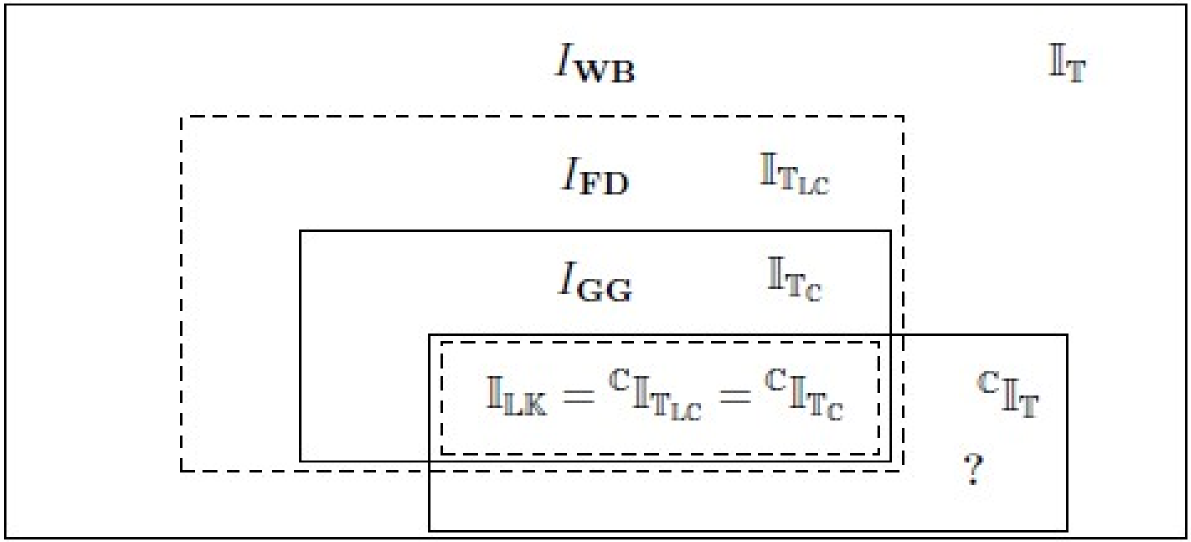
oraz I *jest prawostronnie ciągła ze względu na drugą zmienną.*

Ponadto reprezentacja R-implikacji jest jednoznaczna w tym przypadku.

Niezależność powyższych aksjomatów była otwartym problemem. Został on rozwiązany przez naszego studenta:
R. Łukasik (2010): A note on the mutual independence of the properties in the characterization of R-implications generated from left-continuous t-norms

---

Problem 1. Jaka jest charakteryzacja R-implikacji generowanych z dowolnych t-norm?



- $\mathbb{I}_{\mathbb{T}}$ – rodzina R-implikacji
- ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{I}_{\mathbb{T}}$ – rodzina ciągłych R-implikacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{T}_{\mathbb{LC}}}$ – rodzina R-implikacji generowanych za pomocą t-norm lewostronnie ciągłych
- ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{I}_{\mathbb{T}_{\mathbb{LC}}}$ – rodzina ciągłych R-implikacji generowanych za pomocą t-norm lewostronnie ciągłych
- $\mathbb{I}_{\mathbb{T}_{\mathbb{C}}}$ – rodzina R-implikacji generowanych za pomocą t-norm ciągłych
- ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{I}_{\mathbb{T}_{\mathbb{C}}}$ – rodzina ciągłych R-implikacji generowanych za pomocą t-norm lewostronnie ciagłych
- $\mathbb{I}_{\mathbb{LK}}$ – rodzina R-implikacji sprzężonych do implikacji Łukasiewicza

Problem został rozwiązany również w b.r.:
B. Jayaram (2010): On the continuity of residuals of triangular norms, Nonlinear Analysis

Twierdzenie 4. *R-implikacji I_T jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy T jest t-normą nilpotentną, czyli I_T jest sprzężone do implikacji Łukasiewicza.*

Problem został rozwiązany również w b.r.:
B. Jayaram (2010): On the continuity of residuals of triangular norms, Nonlinear Analysis

Twierdzenie 4. *R-implikacji I_T jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy T jest t-normą nilpotentną, czyli I_T jest sprzężone do implikacji Łukasiewicza.*

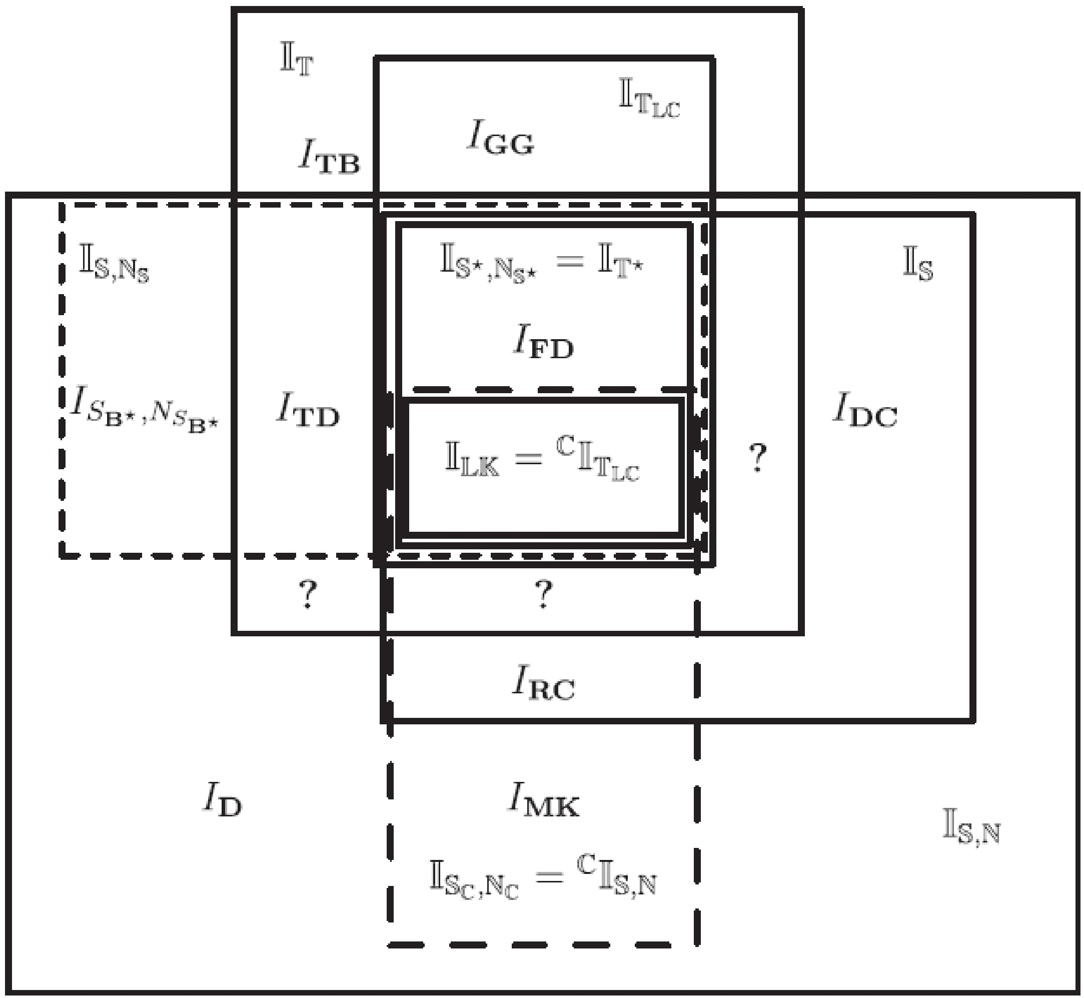
Prace związane z badaniem przekrojów głównych klas implikacji rozmytych

D. Dubois, H. Prade (1984): A theorem on implication functions defined from triangular norms

J.C. Fodor (1991): On fuzzy implication operators

...

M. Baczyński, B. Jayaram (2008): (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey



- $\mathbb{I}_{\mathbb{T}^*}$ – rodzina wszystkich R-implikacji generowanych za pomocą t-norm lewostronnie ciągłych, których naturalna negacja jest silna

QL-implikacje

Definicja 4. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy QL-operacją, jeśli istnieje taka t-norma T, t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \qquad x,y \in [0,1].$$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)}$$

QL-implikacje

Definicja 4. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy QL-operacją, jeśli istnieje taka t-norma T, t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \qquad x,y \in [0,1].$$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)}$$

Dlaczego piszemy QL-operacja, a nie QL-implikacja?

QL-implikacje

Definicja 4. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy QL-operacją, jeśli istnieje taka t-norma T, t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \qquad x, y \in [0,1].$$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)}$$

Dlaczego piszemy QL-operacja, a nie QL-implikacja?

Nie wszystkie QL-operacje są implikacjami rozmytymi zgodnie z naszą definicją (nawet jeśli wszystkie funkcje są ciągłe, a N jest negacją silną).
Operator Zadeha

$$I_{\mathbf{Z}}(x,y) = \max(1-x, \min(x,y)), \qquad x, y \in [0,1],$$

nie spełnia (I1). Jest on QL-operacją generowaną z trójki $(T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}}, N_{\mathbf{C}})$.

QL-implikacje

Definicja 4. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy QL-operacją, jeśli istnieje taka t-norma T, t-konorma S oraz negacja rozmyta N, że

$$I(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \qquad x,y \in [0,1].$$

$$\boxed{p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)}$$

Dlaczego piszemy QL-operacja, a nie QL-implikacja?

Nie wszystkie QL-operacje są implikacjami rozmytymi zgodnie z naszą definicją (nawet jeśli wszystkie funkcje są ciągłe, a N jest negacją silną).

Operator Zadeha

$$I_{\mathbf{Z}}(x,y) = \max(1-x, \min(x,y)), \qquad x,y \in [0,1],$$

nie spełnia (I1). Jest on QL-operacją generowaną z trójki $(T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}}, N_{\mathbf{C}})$.

Implikacja Kleene-Dienesa

$$I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max(1-x, y), \qquad x,y \in [0,1],$$

spełnia (I1). Jest ona QL-implikacją generowaną z trójki $(T_{\mathbf{L}}, S_{\mathbf{L}}, N_{\mathbf{C}})$.

Twierdzenie 5. *Jeśli QL-operacja $I_{T,S,N}$ jest implikacją rozmytą, to para (S, N) spełnia uogólnione prawo wyłączonego środka:*

$$S(N(x), x) = 1, \qquad x \in [0, 1].$$

Twierdzenie 5. *Jeśli QL-operacja $I_{T,S,N}$ jest implikacją rozmytą, to para (S, N) spełnia uogólnione prawo wyłączonego środka:*

$$S(N(x), x) = 1, \qquad x \in [0, 1]. \tag{LEM}$$

Warunek (LEM) jest tylko konieczny, ale nie wystarczający!

Przykład 1. Niech S będzie t-normą zdefiniowaną następująco

$$S_{\mathbf{nM}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x + y \geqslant 1 \\ \max(x, y), & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz $N = N_{\mathbf{C}}$ będzie klasyczną negacją. Para $(S_{\mathbf{nM}}, N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM).

Twierdzenie 5. *Jeśli QL-operacja $I_{T,S,N}$ jest implikacją rozmytą, to para (S,N) spełnia uogólnione prawo wyłączonego środka:*

$$S(N(x),x)=1, \qquad x\in[0,1]. \tag{LEM}$$

Warunek (LEM) jest tylko konieczny, ale nie wystarczający!

Przykład 1. Niech S będzie t-normą zdefiniowaną następująco

$$S_{\mathbf{nM}}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x+y\geqslant 1\\ \max(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

oraz $N=N_{\mathbf{C}}$ będzie klasyczną negacją. Para $(S_{\mathbf{nM}},N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM).
QL-operacja $I_{T,S,N}$ generowana z trójki $(T_{\mathbf{P}},S_{\mathbf{nM}},N_{\mathbf{C}})$ jest dana wzorem

$$I_{T,S,N}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } y=1\\ \max(1-x,xy), & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

i nie spełnia (I1).

Twierdzenie 5. *Jeśli QL-operacja $I_{T,S,N}$ jest implikacją rozmytą, to para (S,N) spełnia uogólnione prawo wyłączonego środka:*

$$S(N(x),x)=1, \qquad x\in[0,1]. \tag{LEM}$$

Warunek (LEM) jest tylko konieczny, ale nie wystarczający!

Przykład 1. Niech S będzie t-normą zdefiniowaną następująco

$$S_{\mathbf{nM}}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x+y\geqslant 1\\ \max(x,y), & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

oraz $N=N_{\mathbf{C}}$ będzie klasyczną negacją. Para $(S_{\mathbf{nM}},N_{\mathbf{C}})$ spełnia (LEM).
QL-operacja $I_{T,S,N}$ generowana z trójki $(T_{\mathbf{P}},S_{\mathbf{nM}},N_{\mathbf{C}})$ jest dana wzorem

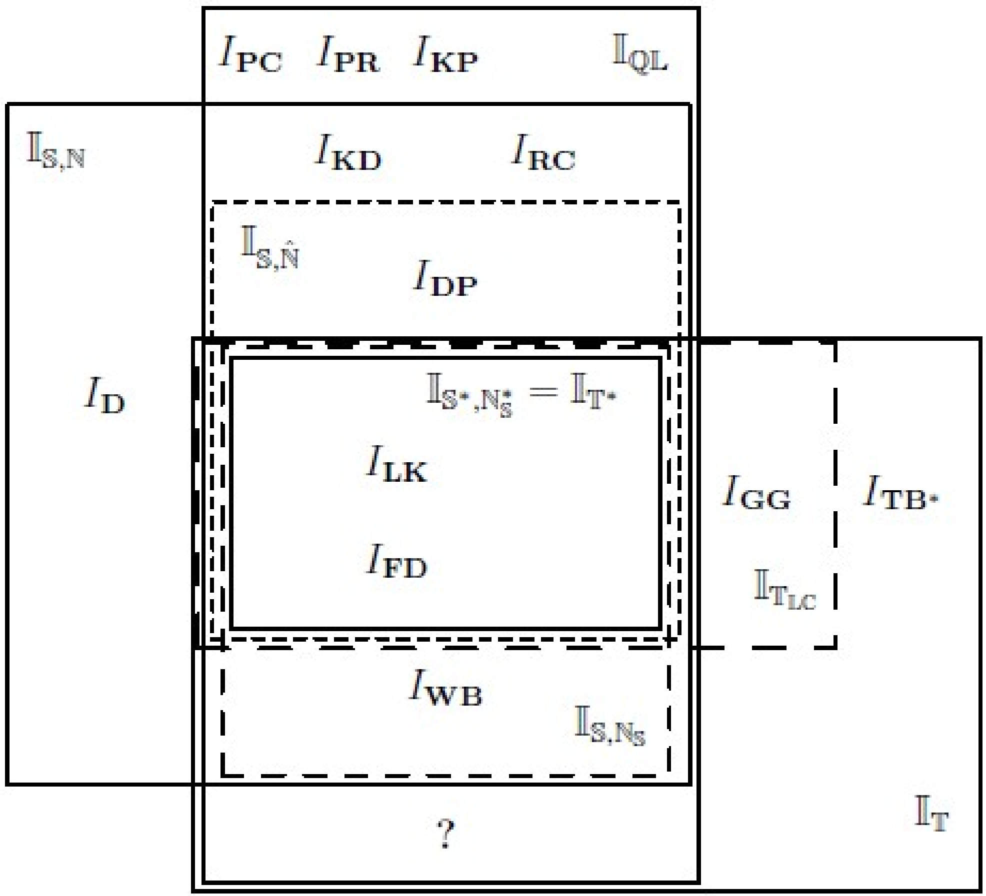
$$I_{T,S,N}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{gdy } y=1\\ \max(1-x,xy), & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

i nie spełnia (I1).

- **E. Trillas, C. Campo, S. del Cubillo (2000):** When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations
- **M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens (2006):** QL-implications versus D-implications
- **Y. Shi, D. Ruan, E.E. Kerre (2008):** On the first place antitonicity in QL-implications

3. PRZEKROJE GŁÓWNYCH KLAS IMPLIKACJI ROZMYTYCH

M. Baczyński, B. Jayaram (2010): QL-implications: some properties and intersections.



4. KLASY UNINORM

Uninormy są uogólnieniem t-norm oraz t-konorm w tym sensie, że element neutralny może należeć do przedziału $[0,1]$. Zatem implikacje rozmyte mogą być otrzymywane z uninorm w podobny sposób jak to było pokazane wcześniej:

1. (U, N)-implikacje $\qquad I(x, y) = U(N(x), y)$
2. Implikacje indukowane z uninorm $\qquad I(x, y) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leqslant y\}$
3. QL-implikacje z uninorm $\qquad I(x, y) = U_1(N(x), U_2(x, y))$

4. KLASY UNINORM

Uninormy są uogólnieniem t-norm oraz t-konorm w tym sensie, że element neutralny może należeć do przedziału $[0, 1]$. Zatem implikacje rozmyte mogą być otrzymywane z uninorm w podobny sposób jak to było pokazane wcześniej:

1. (U, N)-implikacje $\quad I(x, y) = U(N(x), y)$
2. Implikacje indukowane z uninorm $\quad I(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] \mid U(x, t) \leqslant y\}$
3. QL-implikacje z uninorm $\quad I(x, y) = U_1(N(x), U_2(x, y))$

- **B. De Baets, J. Fodor (1997):** On the structure of uninorms and their R-implications
- **B. De Baets, J. Fodor (1999):** Residual operators of uninorms
- **D. Ruiz, J. Torrens (2004):** Residual implications and co-implications from idempotent uninorms
- **D. Ruiz, J. Torrens (2006):** Distributivity of strong implications over conjunctive and disjunctive uninorms
- **M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens (2007):** Two types of implications derived from uninorms
- **M. Baczyński, B. Jayaram (2007):** (U,N)-implications and their characterization

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U \colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

(ii) Element neutralny e danej uninormy U jest wyznaczony jednoznacznie.

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

(ii) Element neutralny e danej uninormy U jest wyznaczony jednoznacznie.

(iii) Dla dowolnej uninormy U mamy $U(0,1) \in \{0,1\}$.

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

(ii) Element neutralny e danej uninormy U jest wyznaczony jednoznacznie.

(iii) Dla dowolnej uninormy U mamy $U(0,1) \in \{0,1\}$.

(iv) Uninorma U taka, że $U(0,1) = U(1,0) = 0$ jest nazywana *koniunktywną* oraz jeśli $U(0,1) = U(1,0) = 1$, to jest ona nazywana *alternatywną*.

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

(ii) Element neutralny e danej uninormy U jest wyznaczony jednoznacznie.

(iii) Dla dowolnej uninormy U mamy $U(0,1) \in \{0,1\}$.

(iv) Uninorma U taka, że $U(0,1) = U(1,0) = 0$ jest nazywana *koniunktywną* oraz jeśli $U(0,1) = U(1,0) = 1$, to jest ona nazywana *alternatywną*.

(v) Struktura uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ jest zawsze następująca: zachowuje się jak t-norma na kwadracie $[0,e]^2$, jak t-konorma na kwadracie $[e,1]^2$ oraz przyjmuje wartości pomiędzy minimum i maksimum w pozostałych przypadkach.

UNINORMY

Definicja 5. Przemienną, łączną oraz rosnącą operację $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy *uninormą*, jeśli istnieje takie $e \in [0,1]$, że $U(e,x) = U(x,e) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

R.R. Yager, A. Rybalov (1996): Uninorm aggregation operators
J. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov (1997): Structure of uninorms

---

Uwaga 1. (i) Jeśli $e = 0$, to U jest t-konormą oraz jeśli $e = 1$, to U jest t-normą.

(ii) Element neutralny e danej uninormy U jest wyznaczony jednoznacznie.

(iii) Dla dowolnej uninormy U mamy $U(0,1) \in \{0,1\}$.

(iv) Uninorma U taka, że $U(0,1) = U(1,0) = 0$ jest nazywana *koniunktywną* oraz jeśli $U(0,1) = U(1,0) = 1$, to jest ona nazywana *alternatywną*.

(v) Struktura uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ jest zawsze następująca: zachowuje się jak t-norma na kwadracie $[0,e]^2$, jak t-konorma na kwadracie $[e,1]^2$ oraz przyjmuje wartości pomiędzy minimum i maksimum w pozostałych przypadkach.

Istnieje kilka różnych klas uninorm, które pokrótce omówimy na kolejnych slajdach.

Klasy $\mathcal{U}_{\mathrm{Min}}$ oraz $\mathcal{U}_{\mathrm{Max}}$

Twierdzenie 6. *Niech $e \in (0,1)$. Dla funkcji $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) U jest taką koniunktywną uninormą z elementem neutralnym e, że odwzorowanie $x \mapsto U(x,1)$ jest ciągłe dla wszystkich $x \in [0,e)$.

(ii) Istnieją t-norma T oraz t-konorma S takie, że

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [0,e], \\ e + (1-e)\cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [e,1], \\ \min(x,y), & \textit{else}, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1].$$

Twierdzenie 7. *Niech $e \in (0,1)$. Dla funkcji $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) U jest taką alternatywną uninormą z elementem neutralnym e, że odwzorowanie $x \mapsto U(x,0)$ jest ciągłe dla wszystkich $x \in (e,1]$.

(ii) Istnieją t-norma T oraz t-konorma S takie, że

$$U(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [0,e], \\ e + (1-e)\cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [e,1], \\ \max(x,y), & \textit{else}, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1].$$

Elementy tych rodzin będzie my oznaczać symbolami $U^{\mathbf{c}}_{T,S,e} \in \mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$ oraz $U^{\mathbf{d}}_{T,S,e} \in \mathcal{U}_{\mathbf{Max}}$.

Uninormy idempotentne $\mathcal{U}_{\mathbf{Idem}}$

Definicja 6. Uninormę U taką, że $U(x,x) = x$ dla wszystkich $x \in [0,1]$ nazywamy idempotentną.
Klasa wszystkich uninorm idempotentnych będzie oznaczona symbolem $\mathcal{U}_{\mathbf{Idem}}$.

Uninormy idempotentne $\mathcal{U}_{\mathrm{Idem}}$

Definicja 6. Uninormę U taką, że $U(x, x) = x$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$ nazywamy idempotentną.
Klasa wszystkich uninorm idempotentnych będzie oznaczona symbolem $\mathcal{U}_{\mathrm{Idem}}$.

MARTÍN, MAYOR and TORRENS (2003) podali charakteryzację wszystkich uninorm idempotentnych, która zawiera w sobie wcześniejsze wyniki DE BAETSA (1999), który pierwszy podał charakteryzację lewostronnie ciągłych oraz prawostronnie ciągłych uninorm idempotentnych, oraz Prof. CZOGAŁY i DREWNIAKA.

E. Czogała, J. Drewniak (1984): Associative monotonic operations in fuzzy set theory

B. De Baets (1999): Idempotent uninorms

J. Martín, G. Mayor, J. Torrens (2003): On locally internal monotonic operators

Twierdzenie 8. *Dla funkcji* $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) U *jest uninormą idempotentną z elementem neutralnym* $e \in [0,1]$*.*

(ii) Istnieje malejąca funkcja $g\colon [0,1] \to [0,1]$ *z punktem stałym* e*, spełniająca*

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \qquad \textit{dla } x \in (g(0),1], \\ g(x) &= 1, \qquad \textit{dla } x \in [0,g(1)), \\ \inf\{y \mid g(y)=g(x)\} &\leqslant g(g(x)) \leqslant \sup\{y \mid g(y)=g(x)\} \end{aligned}$$

dla $x \in [0,1]$ *taka, że* U *ma następującą postać:*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \textit{gdy } y < g(x) \textit{ lub } (y = g(x) \textit{ i } x < g(g(x))), \\ \max(x,y), & \textit{gdy } y > g(x) \textit{ lub } (y = g(x) \textit{ i } x > g(g(x))), \\ \max(x,y) & \\ \quad \textit{lub} & \textit{gdy } y = g(x) \textit{ i } x = g(g(x)), \\ \min(x,y), & \end{cases}$$

oraz U *jest przemienna w zbiorze* $\{(x,y) \mid y = g(x) \textit{ i } x = g(g(x))\}$*.*

D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. DeBaets, J. Fodor (2010): Some remarks on the characterization of idempotent uninorms
Okazuje się, że powyższe warunki nie są wystarczające.

D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. DeBaets, J. Fodor (2010): Some remarks on the characterization of idempotent uninorms
Okazuje się, że powyższe warunki nie są wystarczające. Funkcja g powinna być Id-symetryczna.

Definicja 7. Malejącą funkcję $g\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy Id-symetryczną, jeśli jej uzupełniony wykres F_g jest Id-symetryczny, czyli dla wszystkich $(x,y) \in [0,1]^2$ zachodzi

$$(x,y) \in F_g \iff (y,x) \in F_g.$$

D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. DeBaets, J. Fodor (2010): Some remarks on the characterization of idempotent uninorms
Okazuje się, że powyższe warunki nie są wystarczające. Funkcja g powinna być Id-symetryczna.

Definicja 7. Malejącą funkcję $g\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy Id-symetryczną, jeśli jej uzupełniony wykres F_g jest Id-symetryczny, czyli dla wszystkich $(x,y) \in [0,1]^2$ zachodzi

$$(x,y) \in F_g \Longleftrightarrow (y,x) \in F_g.$$

Przykład 2. Niech $e \in (0,1)$ będzie ustalone i rozważmy funkcje g_c oraz g_d dane jak poniżej:

$$g_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x < e, \\ e, & \text{gdy } x \geqslant e, \end{cases} \qquad g^d(x) = \begin{cases} e, & \text{gdy } x \leqslant e, \\ 0, & \text{gdy } x > e. \end{cases}$$

Wówczas odpowiadające im uninormy idempotentne są następującej postaci:

$$U_{\mathbf{YR}}^{\mathbf{c},e}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \text{gdy } x,y \in [e,1], \\ \min(x,y), & \text{else}, \end{cases}$$

$$U_{\mathbf{YR}}^{\mathbf{d},e}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{gdy } x,y \in [0,e], \\ \max(x,y), & \text{else}. \end{cases}$$

Twierdzenie 9 (Fodor, Yager, Rybalov (1997)). *Dla funkcji* $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) U *jest ściśle rosnącą i ciągłą na* $(0,1)^2$ *uninormą z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$ *taką, że* U *jest samodualna za wyjątkiem punktów* $(0,1)$ *oraz* $(1,0)$ *względem silnej negacji* N *z punktem stałym* e*, czyli*

$$U(x,y) = N(U(N(x),N(y))), \qquad x,y \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}.$$

Twierdzenie 9 (Fodor, Yager, Rybalov (1997)). *Dla funkcji* $U\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) U *jest ściśle rosnącą i ciągłą na* $(0,1)^2$ *uninormą z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$ *taką, że* U *jest samodualna za wyjątkiem punktów* $(0,1)$ *oraz* $(1,0)$ *względem silnej negacji* N *z punktem stałym* e*, czyli*

$$U(x,y) = N(U(N(x),N(y))), \qquad x,y \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}.$$

(ii) Istnieje ciągła i ściśle rosnąca funkcja $h\colon [0,1] \to [-\infty,\infty]$ *(wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do dodatniej stałej multiplikatywnej) taka, że* $h(0) = -\infty$*,* $h(e) = 0$ *dla* $e \in (0,1)$*,* $h(1) = \infty$ *oraz*

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x)+h(y)), & \textit{gdy } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}, \end{cases}$$

lub

$$U(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}(h(x)+h(y)), & \textit{gdy } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}. \end{cases}$$

Uninormy, które można przedstawić jak powyżej nazywamy reprezentatywnymi, a ich klasę oznaczamy symbolem $\mathcal{U}_{\mathrm{Rep}}$.

Przykład 3. (i) Dla addytywnego generatora $h_1(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ otrzymujemy następującą koniunktywną i reprezentatywną uninormę:

$$U^{\mathbf{c}}_{h_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ \dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy}, & \text{else.} \end{cases}$$

W tym przypadku $e = \frac{1}{2}$.

Przykład 3. (i) Dla addytywnego generatora $h_1(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ otrzymujemy następującą koniunktywną i reprezentatywną uninormę:

$$U^{\mathbf{c}}_{h_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ \dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy}, & \text{else.} \end{cases}$$

W tym przypadku $e = \frac{1}{2}$.

Następujące związki istnieją wśród wprowadzonych rodzin uninorm:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbf{Min}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}} &= \mathcal{U}_{I,G_c}, \\ \mathcal{U}_{\mathbf{Max}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}} &= \mathcal{U}_{I,G^d}, \\ \mathcal{U}_{\mathbf{Min}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{Rep}} &= \mathcal{U}_{\mathbf{Max}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{Rep}} = \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{Rep}} = \emptyset, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{I,G_c} &= \{U \in \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}} \mid g = g_c \text{ i } e \in (0,1)\}, \\ \mathcal{U}_{I,G^d} &= \left\{U \in \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}} \mid g = g^d \text{ i } e \in (0,1)\right\}. \end{aligned}$$

5. Klasy implikacji rozmytych generowanych z uninorm

(U,N)-operacje oraz (U,N)-implikacje

Definicja 8. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (U,N)-*operacją*, jeśli istnieją taka uninorma U oraz negacja rozmyta N, że

$$I_{U,N}(x,y) = U(N(x),y), \qquad x,y \in [0,1].$$

5. Klasy implikacji rozmytych generowanych z uninorm

(U,N)-operacje oraz (U,N)-implikacje

Definicja 8. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (U,N)-*operacją*, jeśli istnieją taka uninorma U oraz negacja rozmyta N, że

$$I_{U,N}(x,y) = U(N(x), y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Twierdzenie 10 (De Baets, Fodor (1999))**.** *Dla uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) (U,N)-operacja $I_{U,N}$ jest implikacją rozmytą.

(ii) U jest uninormą koniunktywną, czyli $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

5. Klasy implikacji rozmytych generowanych z uninorm

(U,N)-operacje oraz (U,N)-implikacje

Definicja 8. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy (U,N)-*operacją*, jeśli istnieją taka uninorma U oraz negacja rozmyta N, że

$$I_{U,N}(x,y) = U(N(x),y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Twierdzenie 10 (De Baets, Fodor (1999))**.** *Dla uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) (U,N)-operacja $I_{U,N}$ jest implikacją rozmytą.

(ii) U jest uninormą koniunktywną, czyli $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Tylko jeśli (U,N)-operacja jest implikacją rozmytą używamy terminologii (U,N)-implikacja.

M. Baczyński, B. Jayaram (2009): (U,N)-implications and their characterizations

Twierdzenie 11. *Dla funkcji $U\colon [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I *jest (U,N)-implikacją generowaną z pewnej uninormy* U *z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$ *oraz pewnej ciągłej negacji* N*.*

(ii) I *spełnia* (I1), (I3), (EP) *oraz funkcja* $N_I^e(\cdot) = I(\cdot, e)$ *jest ciągłą negacją dla pewnego* $e \in (0,1)$*.*

Przykład 4. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{LK}}$ z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Max}}$ generowaną przez trójkę $(T_{\mathbf{LK}}, S_{\mathbf{LK}}, 0.5)$, gdzie $T_{\mathbf{LK}}$ ($S_{\mathbf{LK}}$) oznacza odpowiednio t-normę (t-konormę) Łukasiewcza. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}}}(x,y) = \begin{cases} \max(y-x+0.5,0), & \text{gdy } \max(1-x,y) \leqslant 0.5, \\ \min(y-x+0.5,1), & \text{gdy } \min(1-x,y) > 0.5, \\ I_{\mathbf{KD}}(x,y), & \text{else}, \end{cases}$$

gdzie $I_{\mathbf{KD}}$ jest implikacją zdefiniowaną następująco:

$$I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max(1-x,y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Przykład 4. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{LK}}$ z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Max}}$ generowaną przez trójkę $(T_{\mathbf{LK}}, S_{\mathbf{LK}}, 0.5)$, gdzie $T_{\mathbf{LK}}$ ($S_{\mathbf{LK}}$) oznacza odpowiednio t-normę (t-konormę) Łukasiewcza. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}}}(x,y) = \begin{cases} \max(y-x+0.5,0), & \text{gdy } \max(1-x,y) \leqslant 0.5, \\ \min(y-x+0.5,1), & \text{gdy } \min(1-x,y) > 0.5, \\ I_{\mathbf{KD}}(x,y), & \text{else}, \end{cases}$$

gdzie $I_{\mathbf{KD}}$ jest implikacją zdefiniowaną następująco:

$$I_{\mathbf{KD}}(x,y) = \max(1-x,y), \qquad x,y \in [0,1].$$

Przykład 5. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{M}}$ z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Max}}$ generowaną przez trójkę $(T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}}, 0.5)$, gdzie $T_{\mathbf{M}}$ ($S_{\mathbf{M}}$) oznacza odpowiednio t-normę minimum (t-konormę maksimum). Zauważmy, że jednocześnie $U_{\mathbf{M}}$ jest uninormą idempotentną. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{M}},N_{\mathbf{C}}}(x,y) = \begin{cases} \min(1-x,y), & \text{gdy } \max(1-x,y) \leqslant 0.5, \\ I_{\mathbf{KD}}(x,y), & \text{else}. \end{cases}$$

RU-operacje oraz RU-implikacje

Definicja 9. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy RU-operacją jeśli istnieje taka uninorma U, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leqslant y\}, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{3}$$

Jeśli I jest RU-operacją generowaną z uninormy U, to wówczas oznaczamy ją symbolem I_U.

RU-operacje oraz RU-implikacje

Definicja 9. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy RU-operacją jeśli istnieje taka uninorma U, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leqslant y\}, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{3}$$

Jeśli I jest RU-operacją generowaną z uninormy U, to wówczas oznaczamy ją symbolem I_U.

Twierdzenie 12 (De Baets, Fodor 1999)**.** *Dla uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I_U jest implikacją rozmytą.

(ii) Dla wszystkich $z \in [0,1)$ zachodzi $U(0,z) = 0$.

RU-operacje oraz RU-implikacje

Definicja 9. Funkcję $I\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ nazywamy RU-operacją jeśli istnieje taka uninorma U, że

$$I(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \mid U(x,t) \leqslant y\}, \qquad x,y \in [0,1]. \tag{3}$$

Jeśli I jest RU-operacją generowaną z uninormy U, to wówczas oznaczamy ją symbolem I_U.

Twierdzenie 12 (De Baets, Fodor 1999)**.** *Dla uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) I_U jest implikacją rozmytą.

(ii) Dla wszystkich $z \in [0,1)$ zachodzi $U(0,z) = 0$.

Tylko jeśli RU-operacja jest implikacją rozmytą używamy terminologii RU-implikacja.

RU-implikacje z uninorm w klasie $\mathcal{U}_{\mathrm{Min}}$

Twierdzenie 13 (De Baets, Fodor (1999)). *Jeśli $U^{\mathbf{c}}_{T,S,e} \in \mathcal{U}_{\mathrm{Min}}$, to RU-implikacja generowana z U jest dana wzorem*

$$I_{U^{\mathbf{c}}_{T,S,e}}(x,y) = \begin{cases} e \cdot I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [0,e) \textit{ i } x > y, \\ e + (1-e) \cdot I_S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right), & \textit{gdy } x,y \in [e,1] \textit{ i } x \leqslant y, \\ e, & \textit{gdy } x,y \in [e,1] \textit{ i } x > y, \\ I_{\mathbf{GD}}(x,y), & \textit{else}, \end{cases}$$

dla $x,y \in [0,1]$, gdzie $I_S(x,y) = \sup\{t \in [0,1] \ : \ S(x,t) \leqslant y\}$ oznacza residuum t-konormy S oraz $I_{\mathbf{GD}}$ jest implikacją Gödla daną wzorem:

$$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } x \leqslant y \\ y, & \textit{gdy } x > y \end{cases}, \qquad x,y \in [0,1].$$

Przykład 6. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{LK}} = (T_{\mathbf{LK}}, S_{\mathbf{LK}}, 0.5) \in \mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{LK}}}(x,y) = \begin{cases} 0.5 + y - x, & \text{gdy } (x, y \in [0, 0.5) \text{ i } y < x) \\ & \qquad \text{lub } (x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y > x), \\ 0.5, & \text{gdy } x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y \leqslant x, \\ I_{\mathbf{GD}}(x,y), & \text{else.} \end{cases}$$

Przykład 6. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{LK}} = (T_{\mathbf{LK}}, S_{\mathbf{LK}}, 0.5) \in \mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{LK}}}(x,y) = \begin{cases} 0.5 + y - x, & \text{gdy } (x, y \in [0, 0.5) \text{ i } y < x) \\ & \qquad \text{lub } (x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y > x), \\ 0.5, & \text{gdy } x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y \leqslant x, \\ I_{\mathbf{GD}}(x,y), & \text{else.} \end{cases}$$

Przykład 7. Rozważmy koniunktywną uninormę $U_{\mathbf{M}} = (T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}}, 0.5) \in \mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{M}}}(x,y) = \begin{cases} y, & \text{gdy } x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y > x, \\ 0.5, & \text{gdy } x, y \in [0.5, 1] \text{ i } y \leqslant x, \\ I_{\mathbf{GD}}(x,y), & \text{else.} \end{cases}$$

RU-implikacje z uninorm idempotentnych

Twierdzenie 14 (Ruiz, Torrens (2004)). *Jeśli $U \in \mathcal{U}_{\mathrm{Idem}}$ posiada generator g taki, że $g(0) = 1$, to RU-implikacja generowana z U jest dana wzorem*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \max(g(x), y), & \textit{gdy } x \leqslant y, \\ \min(g(x), y), & \textit{gdy } x > y, \end{cases}, \qquad x, y \in [0,1].$$

RU-implikacje z uninorm idempotentnych

Twierdzenie 14 (Ruiz, Torrens (2004))**.** *Jeśli $U \in \mathcal{U}_{\mathbf{Idem}}$ posiada generator g taki, że $g(0) = 1$, to RU-implikacja generowana z U jest dana wzorem*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \max(g(x), y), & \textit{gdy } x \leqslant y, \\ \min(g(x), y), & \textit{gdy } x > y, \end{cases} \qquad x, y \in [0,1].$$

Przykład 8. Rozważmy uninormę idempotentną $U_{\mathbf{YR}}^{\mathbf{c},e} \in \mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$ podaną w przykładzie 2. Wówczas

$$I_{U_{\mathbf{YR}}^{\mathbf{c},e}}(x,y) = \begin{cases} y, & \text{gdy } (y < x \text{ i } y \leqslant e) \text{ lub } (y \geqslant x \text{ i } x \geqslant e), \\ e, & \text{gdy } y < x \text{ i } y > e, \\ 1, & \text{else.} \end{cases} \qquad x, y \in [0,1].$$

RU-implikacje z uninorm reprezentatywnych

Twierdzenie 15 (De Baets, Fodor (1999))**.** *Jeśli* $U_h \in \mathcal{U}_{\mathbf{Rep}}$, *to*

$$I_{U_h}(x, y) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}, \\ h^{-1}(h(y) - h(x)), & \textit{else}, \end{cases}$$

dla wszystkich $x, y \in [0, 1]$.

6. PRZEKROJE POWYŻSZYCH KLAS

M. Baczyński, B. Jayaram (2010): Intersections between some families of (U,N)- and RU-implications

Wprowadźmy oznaczenia:

- $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ – rodzina wszystkich (U,N)-implikacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}_{\mathbb{C}}}$ – rodzina wszystkich (U,N)-implikacji otrzymanych z ciągłych negacji
- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{M}}}$ – rodzina wszystkich RU-implikacji otrzymanych z uninorm z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Min}}$
- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}}}$ – rodzina wszystkich RU-implikacji otrzymanych z uninorm z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Idem}}$.
- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{R}}}$ – rodzina wszystkich RU-implikacji otrzymanych z uninorm z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Rep}}$

Przekrój między $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{M}}$

Lemat 1. *Jeśli* $I_{U,N}$ *jest (U,N)-operacją otrzymaną z uninormy* U *z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$ *oraz negacji* N*, to* $N^e_{I_{U,N}} = N$*.*

Przekrój między $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{M}}}$

Lemat 1. *Jeśli* $I_{U,N}$ *jest (U,N)-operacją otrzymaną z uninormy* U *z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$ *oraz negacji* N*, to* $N^e_{I_{U,N}} = N$*.*

Lemat 2. *Jeśli* $U \in \mathcal{U}_{\mathrm{Min}}$ *z elementem neutralnym* $e \in (0,1)$*, to naturalna negacja* I_U *względem* e *jest funkcją dana wzorem*

$$N^e_{I_U}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } x \in [0,e), \\ e, & \textit{gdy } x \in [e,1], \end{cases}$$

która nie jest implikacją rozmytą.

Przekrój między $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{M}}}$

Lemat 1. *Jeśli $I_{U,N}$ jest (U,N)-operacją otrzymaną z uninormy U z elementem neutralnym $e \in (0,1)$ oraz negacji N, to $N^e_{I_{U,N}} = N$.*

Lemat 2. *Jeśli $U \in \mathcal{U}_{\mathrm{Min}}$ z elementem neutralnym $e \in (0,1)$, to naturalna negacja I_U względem e jest funkcją dana wzorem*

$$N^e_{I_U}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } x \in [0,e), \\ e, & \textit{gdy } x \in [e,1], \end{cases}$$

która nie jest implikacją rozmytą.

Wobec powyższego otrzymujemy

$$\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{M}}} = \emptyset.$$

Przekrój pomiędzy $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}}$

Lemat 3. *Niech U_h będzie reprezentatywną uninormą z addytywnym generatorem h. Wówczas RU-implikacja I_{U_h} jest również (U,N)-implikacją otrzymaną z alternatywnej i reprezentatywnej uninormy $U_h^{\mathbf{d}}$ danej wzorem*

$$U_h^{\mathbf{d}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ U_h(x,y), & \textit{else}, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1],$$

i jej naturalnej negacji N_{U_h}, czyli $I_{U_h} = I_{U_h^{\mathbf{d}},N_{U_h}}$.

Przekrój pomiędzy $\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}}$

Lemat 3. *Niech U_h będzie reprezentatywną uninormą z addytywnym generatorem h. Wówczas RU-implikacja I_{U_h} jest również (U,N)-implikacją otrzymaną z alternatywnej i reprezentatywnej uninormy $U_h^{\mathbf{d}}$ danej wzorem*

$$U_h^{\mathbf{d}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ U_h(x,y), & \textit{else}, \end{cases} \qquad x,y \in [0,1],$$

i jej naturalnej negacji N_{U_h}, czyli $I_{U_h} = I_{U_h^{\mathbf{d}},N_{U_h}}$.

Oznaczmy

- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}^\mathbf{d},\mathbb{N}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}}}$ – rodzina wszystkich (U,N)-implikacji otrzymanych z alternatywnych i reprezentatywnych uninorm oraz ich silnych naturalnych negacji

---

Powyższy wynik można zapisać następująco:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}^\mathbf{d},\mathbb{N}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}}},$$
$$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}^\mathbf{d},\mathbb{N}_{\mathbb{U}_\mathbf{R}}} \subsetneq \mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}_\mathbb{C}} \subsetneq \mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}.$$

Twierdzenie 16. *Niech U_I będzie uninormą idempotentną generowana z ciągłej funkcji g, N negacją rozmytą oraz U uninormą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) RU-implikacja I_{U_I} jest również (U,N)-implikacją $I_{U,N}$.

(ii) $g = N$ jest negacją silną oraz U jest dane wzorem

$$U(x,y) = \begin{cases} U_I(x,y), & \text{gdy } y \neq g(x), \\ \max(x,y), & \text{gdy } y = g(x), \end{cases} \qquad x,y \in [0,1].$$

Twierdzenie 16. *Niech U_I będzie uninormą idempotentną generowana z ciągłej funkcji g, N negacją rozmytą oraz U uninormą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) RU-implikacja I_{U_I} jest również (U,N)-implikacją $I_{U,N}$.

(ii) $g = N$ jest negacją silną oraz U jest dane wzorem

$$U(x,y) = \begin{cases} U_I(x,y), & \text{gdy } y \neq g(x), \\ \max(x,y), & \text{gdy } y = g(x), \end{cases} \qquad x, y \in [0,1].$$

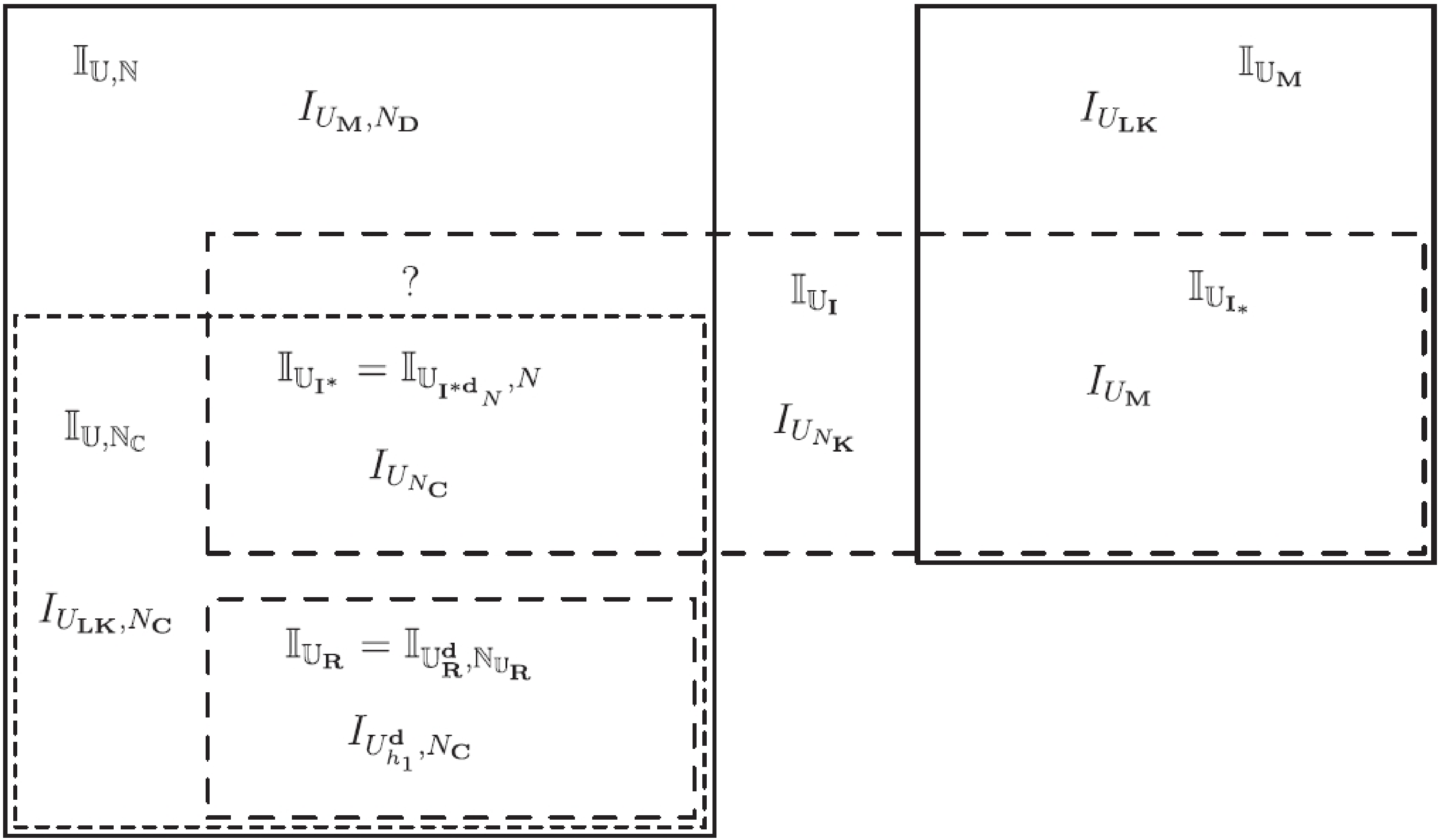
Wniosek 1. *Niech N będzie negacją silną i niech U będzie alternatywną prawostronnie ciągłą uninormą idempotentną otrzymaną z N. Wówczas odpowiadające (U,N)- oraz RU-implikacje są identyczne, czyli $I_{U,N} = I_U$.*

Oznaczmy

- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*}}$ – rodzina wszystkich RU-implikacji otrzymanych z uninorm z klasy $\mathcal{U}_{\mathbf{Idem}}$, których generator jest negacją silną.
- $\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*\mathbf{d}_N},N}$ – rodzina wszystkich (U,N)-implikacji otrzymanych z uninorm prawostronnie ciągłych i idempotentnych, których generator g jest silną negacją, oraz tej negacji N.

Korzystając z tej notacji, otrzymane wyniki można zobrazować następująco:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_\mathbf{I}} \cap \mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}_\mathbb{C}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*\mathbf{d}_N},N}.$$


$\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}}$
$I_{U_{\mathbf{M}},N_{\mathbf{D}}}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{M}}}$
$I_{U_{\mathbf{LK}}}$
?
$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}}}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}_*}}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{I}^*\mathbf{d}_N},N}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{U},\mathbb{N}_{\mathbb{C}}}$
$I_{U_{N_{\mathbf{C}}}}$
$I_{U_{N_{\mathbf{K}}}}$
$I_{U_{\mathbf{M}}}$
$I_{U_{\mathbf{LK}},N_{\mathbf{C}}}$
$\mathbb{I}_{\mathbb{U}_{\mathbf{R}}} = \mathbb{I}_{\mathbb{U}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{R}},\mathbb{N}_{\mathbb{U}_{\mathbf{R}}}}$
$I_{U^{\mathbf{d}}_{h_1},N_{\mathbf{C}}}$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!!!