Nieosobliwe formy dwuliniowe na sumie prostej ideałów

Beata Rothkegel

Zakład Algebry i Teorii Liczb

- R – pierścień przemienny z jedynką
- M – skończenie generowany R-moduł projektywny
- $\alpha\colon M \times M \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na M

Definicja

Parę (M, α) nazywamy nieosobliwą przestrzenią dwuliniową, gdy tzw. homomorfizm dołączony $\widehat{\alpha}\colon M \to \mathrm{Hom}_R(M, R)$,

$$\widehat{\alpha}(x)(y) := \alpha(x, y) \qquad \text{dla } x, y \in M$$

jest izomorfizmem R-modułów.

- R – pierścień przemienny z jedynką
- M – skończenie generowany R-moduł projektywny
- $\alpha\colon M \times M \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na M

Definicja

*Parę (M, α) nazywamy **nieosobliwą przestrzenią dwuliniową**, gdy tzw. homomorfizm dołączony $\widehat{\alpha}\colon M \to \mathrm{Hom}_R(M, R)$,*

$$\widehat{\alpha}(x)(y) := \alpha(x, y) \qquad \text{dla } x, y \in M$$

jest izomorfizmem R-modułów.

- R – pierścień przemienny z jedynką
- M – skończenie generowany R-moduł projektywny
- $\alpha\colon M \times M \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na M

Definicja

Parę (M, α) nazywamy nieosobliwą przestrzenią dwuliniową, gdy tzw. homomorfizm dołączony $\widehat{\alpha}\colon M \to \mathrm{Hom}_R(M, R)$,

$$\widehat{\alpha}(x)(y) := \alpha(x, y) \qquad \text{dla } x, y \in M$$

jest izomorfizmem R-modułów.

- R – pierścień przemienny z jedynką
- M – skończenie generowany R-moduł projektywny
- $\alpha\colon M \times M \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na M

Definicja

Parę (M, α) nazywamy ***nieosobliwą przestrzenią dwuliniową****, gdy tzw. homomorfizm dołączony $\widehat{\alpha}\colon M \to \mathrm{Hom}_R(M, R)$,*

$$\widehat{\alpha}(x)(y) := \alpha(x, y) \qquad \text{dla } x, y \in M$$

jest izomorfizmem R-modułów.

Definicja

Nieosobliwa przestrzeń dwuliniowa (M, α) *jest* ***metaboliczna****, gdy istnieją podmoduły* N, M' *modułu* M*, dla których*

$$M = N \oplus M', \qquad N \cong N^{\perp}.$$

- $M := (M, \alpha)$

Definicja

Dwie nieosobliwe przestrzenie M *i* N *nazywamy* ***podobnymi****, gdy istnieją przestrzenie metaboliczne* S *i* S' *takie, że*

$$M \perp S \cong N \perp S'.$$

Definicja

Nieosobliwa przestrzeń dwuliniowa (M, α) *jest* **metaboliczna**, *gdy istnieją podmoduły* N, M' *modułu* M, *dla których*

$$M = N \oplus M', \qquad N \cong N^{\perp}.$$

- $M := (M, \alpha)$

Definicja

Dwie nieosobliwe przestrzenie M *i* N *nazywamy* **podobnymi**, *gdy istnieją przestrzenie metaboliczne* S *i* S' *takie, że*

$$M \perp S \cong N \perp S'.$$

Definicja

Nieosobliwa przestrzeń dwuliniowa (M, α) *jest metaboliczna, gdy istnieją podmoduły* N, M' *modułu* M*, dla których*

$$M = N \oplus M', \qquad N \cong N^{\perp}.$$

- $M := (M, \alpha)$

Definicja

Dwie nieosobliwe przestrzenie M *i* N *nazywamy podobnymi, gdy istnieją przestrzenie metaboliczne* S *i* S' *takie, że*

$$M \perp S \cong N \perp S'.$$

Stwierdzenie

Podobieństwo nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych jest relacją równoważności.

- WR – zbiór wszystkich klas podobieństwa (klas Witta)
- $\langle M \rangle$ lub $\langle M, \alpha \rangle$ – klasa zawierająca przestrzeń (M, α)
- $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ – gdy M wolny z bazą ortogonalną; macierz α z główną przekątną $a_1, \ldots, a_n$

Stwierdzenie

Podobieństwo nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych jest relacją równoważności.

- WR – zbiór wszystkich klas podobieństwa (klas Witta)
- $\langle M \rangle$ lub $\langle M, \alpha \rangle$ – klasa zawierająca przestrzeń (M, α)
- $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ – gdy M wolny z bazą ortogonalną; macierz α z główną przekątną $a_1, \ldots, a_n$

Stwierdzenie

Podobieństwo nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych jest relacją równoważności.

- WR – zbiór wszystkich klas podobieństwa (klas Witta)
- $\langle\, M \,\rangle$ lub $\langle\, M, \alpha \,\rangle$ – klasa zawierająca przestrzeń (M, α)
- $\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle$ – gdy M wolny z bazą ortogonalną;
  macierz α z główną przekątną $a_1, \ldots, a_n$

Stwierdzenie

Podobieństwo nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych jest relacją równoważności.

- WR – zbiór wszystkich klas podobieństwa (klas Witta)
- $\langle\, M \,\rangle$ lub $\langle\, M, \alpha \,\rangle$ – klasa zawierająca przestrzeń (M, α)
- $\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle$ – gdy M wolny z bazą ortogonalną;
  macierz α z główną przekątną $a_1, \ldots, a_n$

DODAWANIE W *WR* $\langle M \rangle + \langle N \rangle = \langle M \perp N \rangle$

MNOŻENIE W *WR* $\langle M \rangle \cdot \langle N \rangle = \langle M \otimes_R N \rangle$

Twierdzenie

Zbiór WR wszystkich klas podobieństwa nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych nad R z operacją dodawania + i mnożenia · jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

$\langle 1 \rangle$ – *jedynka pierścienia*
$\langle 0 \rangle$ – *zero pierścienia*
(klasa złożona z wszystkich przestrzeni metabolicznych)

Definicja

Pierścień WR nazywamy pierścieniem Witta pierścienia R.

DODAWANIE W WR $\langle M \rangle + \langle N \rangle = \langle M \perp N \rangle$

MNOŻENIE W WR $\langle M \rangle \cdot \langle N \rangle = \langle M \otimes_R N \rangle$

Twierdzenie

Zbiór WR wszystkich klas podobieństwa nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych nad R z operacją dodawania $+$ i mnożenia $\cdot$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

$\langle 1 \rangle$ – *jedynka pierścienia*

$\langle 0 \rangle$ – *zero pierścienia*

(klasa złożona z wszystkich przestrzeni metabolicznych)

Definicja

Pierścień WR nazywamy pierścieniem Witta pierścienia R.

DODAWANIE W *WR* $\langle M \rangle + \langle N \rangle = \langle M \perp N \rangle$

MNOŻENIE W *WR* $\langle M \rangle \cdot \langle N \rangle = \langle M \otimes_R N \rangle$

Twierdzenie

Zbiór WR wszystkich klas podobieństwa nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych nad R z operacją dodawania + i mnożenia · jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

$\langle 1 \rangle$ – *jedynka pierścienia*
$\langle 0 \rangle$ – *zero pierścienia*
(klasa złożona z wszystkich przestrzeni metabolicznych)

Definicja

Pierścień WR nazywamy pierścieniem Witta pierścienia R.

DODAWANIE W *WR* $\langle M \rangle + \langle N \rangle = \langle M \perp N \rangle$

MNOŻENIE W *WR* $\langle M \rangle \cdot \langle N \rangle = \langle M \otimes_R N \rangle$

Twierdzenie

Zbiór WR wszystkich klas podobieństwa nieosobliwych przestrzeni dwuliniowych nad R z operacją dodawania + i mnożenia · jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

$\langle 1 \rangle$ – *jedynka pierścienia*
$\langle 0 \rangle$ – *zero pierścienia*
(klasa złożona z wszystkich przestrzeni metabolicznych)

Definicja

Pierścień WR nazywamy pierścieniem Witta pierścienia R.

Kiedy (M, α) jest nieosobliwa?

- M – skończenie generowany R-moduł wolny

Twierdzenie

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz α w dowolnej bazie M jest odwracalna.

- M – dowolny skończenie generowany R-moduł projektywny

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy?

Kiedy (M, α) jest nieosobliwa?

- M – skończenie generowany R-moduł wolny

Twierdzenie

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz α w dowolnej bazie M jest odwracalna.

- M – dowolny skończenie generowany R-moduł projektywny

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy?

Kiedy (M, α) jest nieosobliwa?

- M – skończenie generowany R-moduł wolny

Twierdzenie

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz α w dowolnej bazie M jest odwracalna.

- M – dowolny skończenie generowany R-moduł projektywny

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy?

Kiedy (M, α) jest nieosobliwa?

- M – skończenie generowany R-moduł wolny

Twierdzenie

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy macierz α w dowolnej bazie M jest odwracalna.

- M – dowolny skończenie generowany R-moduł projektywny

(M, α) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy?

M. Ciemała, K. Szymiczek, On the Existence of Nonsingular Bilinear Forms, *Tatra Mt. Math. Publ.* **32** *(2005), 1–13*

OPIS NIEOSOBLIWYCH FORM DWULINIOWYCH NA IDEAŁACH UŁAMKOWYCH

Twierdzenie

R – pierścień całkowity, K – jego ciało ułamków, I – ideał ułamkowy ciała K.
Na ideale I można zdefiniować nieosobliwą formę dwuliniową wtedy i tylko wtedy, gdy I^2 jest ideałem głównym.

M. Ciemała, K. Szymiczek, **On the Existence of Nonsingular Bilinear Forms**, *Tatra Mt. Math. Publ.* **32** *(2005), 1–13*

OPIS NIEOSOBLIWYCH FORM DWULINIOWYCH NA IDEAŁACH UŁAMKOWYCH

Twierdzenie

R – pierścień całkowity, K – jego ciało ułamków, I – ideał ułamkowy ciała K.
Na ideale I można zdefiniować nieosobliwą formę dwuliniową wtedy i tylko wtedy, gdy I^2 jest ideałem głównym.

Twierdzenie

R – pierścień całkowity, K – jego ciało ułamków, I – ideał ułamkowy ciała K taki, że $I^2 = pR$ dla pewnego $p \in K$, $p \neq 0$.

Forma $\alpha \colon I \times I \to R$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyznaczony w sposób jednoznaczny element odwracalny $u \in R$ taki, że

$$\alpha(x, y) = \frac{u}{p}xy \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in I.$$

Opiszemy wszystkie nieosobliwe formy dwuliniowe na sumie prostej skończonej liczby ideałów ułamkowych.

Motywacja: badanie własności pierścieni Witta pewnych pierścieni noetherowskich wymiaru (Krulla) 1.

Twierdzenie

R – pierścień całkowity, K – jego ciało ułamków, I – ideał ułamkowy ciała K taki, że $I^2 = pR$ dla pewnego $p \in K, \ p \neq 0$.

Forma $\alpha\colon I \times I \to R$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyznaczony w sposób jednoznaczny element odwracalny $u \in R$ taki, że

$$\alpha(x, y) = \frac{u}{p}xy \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in I.$$

Opiszemy wszystkie nieosobliwe formy dwuliniowe na sumie prostej skończonej liczby ideałów ułamkowych.

Motywacja: badanie własności pierścieni Witta pewnych pierścieni noetherowskich wymiaru (Krulla) 1.

Twierdzenie

R – pierścień całkowity, K – jego ciało ułamków, I – ideał ułamkowy ciała K taki, że $I^2 = pR$ dla pewnego $p \in K, \ p \neq 0$.

Forma $\alpha \colon I \times I \to R$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wyznaczony w sposób jednoznaczny element odwracalny $u \in R$ taki, że

$$\alpha(x, y) = \frac{u}{p} xy \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in I.$$

Opiszemy wszystkie nieosobliwe formy dwuliniowe na sumie prostej skończonej liczby ideałów ułamkowych.

Motywacja: badanie własności pierścieni Witta pewnych pierścieni noetherowskich wymiaru (Krulla) 1.

Stwierdzenie

R – pierścień noetherowski wymiaru 1.
M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalny ideał I pierścienia R taki, że

$$M \cong I \oplus R^n.$$

- R – dowolny pierścień całkowity
- K – ciało ułamków pierścienia R
- M – suma prosta skończonej liczby ideałów ułamkowych ciała K

Stwierdzenie

M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwracalne ideały $I_1, \ldots, I_n$ pierścienia R takie, że

$$M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

Stwierdzenie

R – pierścień noetherowski wymiaru 1.
M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalny ideał I pierścienia R taki, że
$$M \cong I \oplus R^n.$$

- R – dowolny pierścień całkowity
- K – ciało ułamków pierścienia R
- M – suma prosta skończonej liczby ideałów ułamkowych ciała K

Stwierdzenie

M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwracalne ideały $I_1, \ldots, I_n$ pierścienia R takie, że

$$M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

Stwierdzenie

R – pierścień noetherowski wymiaru 1.
M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalny ideał I pierścienia R taki, że

$$M \cong I \oplus R^n.$$

- R – dowolny pierścień całkowity
- K – ciało ułamków pierścienia R
- M – suma prosta skończonej liczby ideałów ułamkowych ciała K

Stwierdzenie

M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwracalne ideały $I_1, \dots, I_n$ pierścienia R takie, że

$$M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

Stwierdzenie

R – pierścień noetherowski wymiaru 1.
M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalny ideał I pierścienia R taki, że

$$M \cong I \oplus R^n.$$

- R – dowolny pierścień całkowity
- K – ciało ułamków pierścienia R
- M – suma prosta skończonej liczby ideałów ułamkowych ciała K

Stwierdzenie

M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwracalne ideały $I_1, \ldots, I_n$ pierścienia R takie, że

$$M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

Stwierdzenie

R – pierścień noetherowski wymiaru 1.
M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalny ideał I pierścienia R taki, że

$$M \cong I \oplus R^n.$$

- R – dowolny pierścień całkowity
- K – ciało ułamków pierścienia R
- M – suma prosta skończonej liczby ideałów ułamkowych ciała K

Stwierdzenie

M jest skończenie generowanym R-modułem projektywnym rangi n, $n \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwracalne ideały $I_1, \ldots, I_n$ pierścienia R takie, że

$$M \cong I_1 \oplus \cdots \oplus I_n.$$

Opiszemy wszystkie nieosobliwe formy dwuliniowe na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$.

Warunek konieczny

Twierdzenie

$I_1, \ldots, I_n$ – odwracalne ideały pierścienia R.
Jeśli na R-module $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ można zdefiniować nieosobliwą formę dwuliniową, to $(I_1 \cdots I_n)^2$ jest ideałem głównym.

Opiszemy wszystkie nieosobliwe formy dwuliniowe na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$.

Warunek konieczny

Twierdzenie

$I_1, \ldots, I_n$ – odwracalne ideały pierścienia R.
Jeśli na R-module $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ można zdefiniować nieosobliwą formę dwuliniową, to $(I_1 \cdots I_n)^2$ jest ideałem głównym.

Najpierw opiszemy dowolną, niekoniecznie nieosobliwą, formę dwuliniową na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

Oznaczmy

$$S_{jj} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2, \qquad j = 1, \ldots, n$$

jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$

$$S_{jk} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot I_j \cdot (I_{j+1} \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_n)^2,$$

$j, k = 1, \ldots, n,\ j \neq k$

Najpierw opiszemy dowolną, niekoniecznie nieosobliwą, formę dwuliniową na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

Oznaczmy

$$S_{jj} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2, \qquad j = 1, \ldots, n$$

jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$

$$S_{jk} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot I_j \cdot (I_{j+1} \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_n)^2,$$

$j, k = 1, \ldots, n, \ j \neq k$

Najpierw opiszemy dowolną, niekoniecznie nieosobliwą, formę dwuliniową na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

Oznaczmy

$$S_{jj} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2, \qquad j = 1, \dots, n$$

jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$

$$S_{jk} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot I_j \cdot (I_{j+1} \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_n)^2,$$

$j, k = 1, \dots, n, \; j \neq k$

Najpierw opiszemy dowolną, niekoniecznie nieosobliwą, formę dwuliniową na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$.

Oznaczmy

$$S_{jj} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2, \qquad j = 1, \dots, n$$

jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$

$$S_{jk} := (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot I_j \cdot (I_{j+1} \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_n)^2,$$

$j, k = 1, \dots, n, \; j \neq k$

Stwierdzenie

R – pierścień całkowity, $I_1, \ldots, I_n$ – ideały w R takie, że $(I_1 \cdots I_n)^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$.

Odwzorowanie $\alpha\colon \bigoplus_{j=1}^n I_j \times \bigoplus_{j=1}^n I_j \to R$ jest symetryczną formą dwuliniową na $\bigoplus_{j=1}^n I_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wyznaczone w sposób jednoznaczny elementy
$a_{jk} \in S_{jk},\ a_{jk} = a_{kj},\ j, k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$\alpha((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{p} x_j y_k$$

dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \bigoplus_{j=1}^n I_j$.

WKW na nieosobliwość α

Twierdzenie

Forma α jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\left(a_{jk}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = p^{n-1}\cdot u$$

dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R$.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \frac{a}{p}xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \frac{a}{p} xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha \colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \frac{a}{p}xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$
- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \dfrac{a}{p}xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x,y) = \dfrac{a}{p}xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \dfrac{a}{p}xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha \colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \dfrac{a}{p} xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \dfrac{a}{p} xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

Przykład.

- I – ideał pierścienia R
- $I^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- $\alpha\colon I \times I \to R$ – symetryczna forma dwuliniowa na I
- $\alpha(x, y) = \dfrac{a}{p} xy$ dla wszystkich $x, y \in I$

  $\wr$ jeśli $n = 1$, to $S_{11} = R$ $\wr$

- Zatem $a \in R$

  $\wr$ α nieosobliwa wtw., gdy a jest odwracalne w R $\wr$

Pokażemy oczywisty geometrycznie fakt, że suma prosta ortogonalna n egzemplarzy przestrzeni (I, α) jest nieosobliwa wtw., gdy przestrzeń (I, α) jest nieosobliwa.

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$

  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$

  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$

  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k$, $a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \dots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p}x_1y_1 + \frac{a}{p}x_2y_2 + \cdots + \frac{a}{p}x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_jy_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^nR$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1}R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M,\beta) = \underbrace{(I,\alpha) \perp \cdots \perp (I,\alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) =$
  $\alpha(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) + \cdots + \alpha(x_n,y_n) =$
  $\frac{a}{p}x_1y_1 + \frac{a}{p}x_2y_2 + \cdots + \frac{a}{p}x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1}\cdot a}{p^n}x_jy_j$

  dla wszystkich $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I\cdots I}_{n})^2 = p^nR$ oraz
- dla $j \in \{1,\ldots,n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1}\cdot a \in p^{n-1}R = (\underbrace{I\cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1\cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1}\cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j,k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \neq k$, $a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M,\beta) = \underbrace{(I,\alpha) \perp \cdots \perp (I,\alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) =$
  $\alpha(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) + \cdots + \alpha(x_n,y_n) =$
  $\frac{a}{p}x_1y_1 + \frac{a}{p}x_2y_2 + \cdots + \frac{a}{p}x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1}\cdot a}{p^n}x_jy_j$

  dla wszystkich $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I\cdots I}_{n})^2 = p^nR$ oraz
- dla $j \in \{1,\ldots,n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1}\cdot a \in p^{n-1}R = (\underbrace{I\cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1\cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1}\cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j,k \in \{1,\ldots,n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M,\beta) = \underbrace{(I,\alpha) \perp \cdots \perp (I,\alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) =$
  $\alpha(x_1,y_1) + \alpha(x_2,y_2) + \cdots + \alpha(x_n,y_n) =$
  $\frac{a}{p}x_1y_1 + \frac{a}{p}x_2y_2 + \cdots + \frac{a}{p}x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1}\cdot a}{p^n}x_jy_j$

  dla wszystkich $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I\cdots I}_{n})^2 = p^nR$ oraz
- dla $j \in \{1,\ldots,n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1}\cdot a \in p^{n-1}R = (\underbrace{I\cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1\cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1}\cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j,k \in \{1,\ldots,n\}, j \neq k, \quad a_{jk} = 0$

- $M = \underbrace{I \oplus \cdots \oplus I}_{n}$
- $(M, \beta) = \underbrace{(I, \alpha) \perp \cdots \perp (I, \alpha)}_{n}$ – suma prosta ortogonalna
- $\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) =$
  $\alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) + \cdots + \alpha(x_n, y_n) =$
  $\frac{a}{p} x_1 y_1 + \frac{a}{p} x_2 y_2 + \cdots + \frac{a}{p} x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{p^{n-1} \cdot a}{p^n} x_j y_j$

  dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M$
- Zauważmy, że $(\underbrace{I \cdots I}_{n})^2 = p^n R$ oraz
- dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
  $a_{jj} = p^{n-1} \cdot a \in p^{n-1} R = (\underbrace{I \cdots I}_{n-1})^2 = S_{jj}$

  $\wr S_{jj} = (I_1 \cdots I_{j-1})^2 \cdot (I_{j+1} \cdots I_n)^2 \wr$
- dla $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$, $\quad a_{jk} = 0$

- Zatem

  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  $a^n = u \quad$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  a jest odwracalne w $R \Leftrightarrow$

  forma $\quad \alpha(x, y) = \dfrac{a}{p} xy \quad$ jest nieosobliwa.

- Zatem
  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$
  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R$ $\Leftrightarrow$

  $$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R$ $\Leftrightarrow$

  $a^n = u$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R$ $\Leftrightarrow$

  a jest odwracalne w $R \Leftrightarrow$

  forma $\alpha(x, y) = \frac{a}{p} xy$ jest nieosobliwa.

- Zatem
  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$
  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \Leftrightarrow$

$a^n = u$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \Leftrightarrow$

a jest odwracalne w $R \Leftrightarrow$

forma $\alpha(x, y) = \frac{a}{p} xy$ jest nieosobliwa.

- Zatem
  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$
  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \ \Leftrightarrow$

  $$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \ \Leftrightarrow$

  $a^n = u$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \ \Leftrightarrow$

  a jest odwracalne w $R \Leftrightarrow$

  forma $\alpha(x, y) = \frac{a}{p} xy$ jest nieosobliwa.

- Zatem
  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$
  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  $a^n = u \quad$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  a jest odwracalne w R $\Leftrightarrow$

  forma $\quad \alpha(x, y) = \frac{a}{p} xy \quad$ jest nieosobliwa.

- Zatem
  β jest nieosobliwa $\Leftrightarrow \det(a_{jk}) = p^{n(n-1)} \cdot u$
  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  $$\det \begin{pmatrix} p^{n-1} \cdot a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{n-1} \cdot a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{n-1} \cdot a \end{pmatrix} = p^{n(n-1)} \cdot u$$

  dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  $a^n = u \quad$ dla pewnego elementu odwracalnego $u \in R \;\; \Leftrightarrow$

  a jest odwracalne w $R \Leftrightarrow$

  forma $\quad \alpha(x, y) = \dfrac{a}{p} xy \quad$ jest nieosobliwa.

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na izometrię

- $(I_1 \cdots I_n)^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- Oznaczmy dla $k, r \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq r,$

$$T_{kr} := (I_1 \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_{r-1})^2 \cdot I_r^3 \cdot (I_{r+1} \cdots I_n)^2$$

- $(\star) \qquad C = \frac{1}{p} \cdot (c_{kr})_{1 \leqslant k,r \leqslant n},$

$c_{rr} \in pR,\ c_{kr} \in T_{kr},\ k, r \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq r$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na izometrię

- $(I_1 \cdots I_n)^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- Oznaczmy dla $k, r \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq r$,

$$T_{kr} := (I_1 \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_{r-1})^2 \cdot I_r^3 \cdot (I_{r+1} \cdots I_n)^2$$

- $(\star)$ $\qquad C = \frac{1}{p} \cdot (c_{kr})_{1 \leqslant k, r \leqslant n},$

$c_{rr} \in pR$, $c_{kr} \in T_{kr}$, $k, r \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq r$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na izometrię

- $(I_1 \cdots I_n)^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- Oznaczmy dla $k, r \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq r,$

$$T_{kr} := (I_1 \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_{r-1})^2 \cdot I_r^3 \cdot (I_{r+1} \cdots I_n)^2$$

- $(\star) \qquad C = \frac{1}{p} \cdot (c_{kr})_{1 \leqslant k, r \leqslant n},$

$c_{rr} \in pR,\ c_{kr} \in T_{kr},\ k, r \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq r$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na izometrię

- $(I_1 \cdots I_n)^2 = pR$ dla pewnego $0 \neq p \in R$
- Oznaczmy dla $k, r \in \{1, \dots, n\},\ k \neq r,$

$$T_{kr} := (I_1 \cdots I_{k-1})^2 \cdot I_k \cdot (I_{k+1} \cdots I_{r-1})^2 \cdot I_r^3 \cdot (I_{r+1} \cdots I_n)^2$$

- $$(\star) \qquad C = \frac{1}{p} \cdot (c_{kr})_{1 \leqslant k,r \leqslant n},$$

$c_{rr} \in pR,\ c_{kr} \in T_{kr},\ k, r \in \{1, \dots, n\},\ k \neq r$

Twierdzenie

α, β – nieosobliwe formy dwuliniowe na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ zdefiniowane wzorami

$$\alpha((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{p} x_j y_k,$$

$$\beta((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{b_{jk}}{p} x_j y_k.$$

Przestrzenie $(\bigoplus_{j=1}^{n} I_j, \alpha)$, $(\bigoplus_{j=1}^{n} I_j, \beta)$ są izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz C taka jak w $(\star)$ o wyznaczniku odwracalnym w R oraz

$$(a_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n} = C \cdot (b_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n} \cdot C^T.$$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na podobieństwo

(tzn. kiedy dwie nieosobliwe przestrzenie należą do tej samej klasy podobieństwa w pierścieniu Witta WR?)

- R – pierścień Dedekinda
- K – ciało ułamków pierścienia R
- $\mathrm{char} K \neq 2$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na podobieństwo

(tzn. kiedy dwie nieosobliwe przestrzenie należą do tej samej klasy podobieństwa w pierścieniu Witta WR?)

- R – pierścień Dedekinda
- K – ciało ułamków pierścienia R
- $\mathrm{char} K \neq 2$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na podobieństwo

(tzn. kiedy dwie nieosobliwe przestrzenie należą do tej samej klasy podobieństwa w pierścieniu Witta WR?)

- R – pierścień Dedekinda
- K – ciało ułamków pierścienia R
- $\mathrm{char} K \neq 2$

Klasyfikacja nieosobliwych form dwuliniowych na $\bigoplus_{j=1}^{n} I_j$ ze względu na podobieństwo

(tzn. kiedy dwie nieosobliwe przestrzenie należą do tej samej klasy podobieństwa w pierścieniu Witta WR?)

- R – pierścień Dedekinda
- K – ciało ułamków pierścienia R
- $\mathrm{char} K \neq 2$

Twierdzenie

α, β – nieosobliwe formy dwuliniowe na $\bigoplus_{j=1}^n I_j$ zdefiniowane wzorami

$$\alpha((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{a_{jk}}{p} x_j y_k,$$

$$\beta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{b_{jk}}{p} x_j y_k.$$

Przestrzenie $(\bigoplus_{j=1}^n I_j, \alpha)$, $(\bigoplus_{j=1}^n I_j, \beta)$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz

$$C = (c_{kr})_{1 \leqslant k,r \leqslant n}, \quad c_{kr} \in K, \; k, r \in \{1, \ldots, n\},$$

o wyznaczniku odwracalnym w R oraz

$$(a_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant n} = C \cdot (b_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \cdot C^T.$$

Literatura

R. Baeza, *Quadratic Forms Over Semilocal Rings*, LNM **655**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978.

M. Ciemała, K. Szymiczek, *On the Existence of Nonsingular Bilinear Forms on Projective Modules*, Tatra Mt. Math. Publ. **32** (2005), 1–13.

M. A. Marshall, *Bilinear Forms and Orderings on Commutative Rings*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics – No. **71**, Queen's University Kingston, Ontario, Canada 1985.

J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Ann. of Math. Stud., Vol. **72**, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton N. J., 1971.

J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Vol. **73**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

B. Rothkegel, *Nonsingular Bilinear Forms on a Direct Sum of Ideals*, preprint.

K. Szymiczek, *Bilinear Algebra: an Introduction to the Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Algebra, Logic and Applications Series Vol. **7**, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1997.

Ch. Weibel, *An Introduction to Algebraic K-Theory*, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0105/.