Matematyka z elementami statystyki

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Statystyka

Statystyka:

- nauka zajmująca się liczbowym opisem zjawisk masowych oraz ich analizowaniem,
- zbiory informacji liczbowych.

(Słownik Języka Polskiego)

Statystyka

Statystyka:

- nauka zajmująca się liczbowym opisem zjawisk masowych oraz ich analizowaniem,
- zbiory informacji liczbowych.

(Słownik Języka Polskiego)

Statystyka:

- nauka, której przedmiotem zainteresowania są metody pozyskiwania i prezentacji, a przede wszystkim analizy danych opisujących zjawiska, w tym masowe.

(Wikipedia)

Podstawowe pojęcia statystyczne:

- populacja (zbiorowość statystyczna, masa statystyczna) – zbiór dowolnych elementów objętych badaniem statystycznym,
- jednostka statystyczna (jednostka badania, obserwacji) – elementy składowe badanej populacji.

Statystyka

Cechy statystyczne:

- stałe – nie podlegają badaniu, decydują o zaliczeniu jednostek do określonej populacji,
- zmienne
  - jakościowe (niemierzalne),
  - ilościowe (mierzalne) – dają się wyrazić za pomocą liczb
    - skokowe – wartości mogą wyrażać się jedynie określonymi liczbami zmieniającymi się skokowo, bez wartości pośrednich,
    - ciągłe – mogę przyjmować każdą wartość z określonego skończonego przedziału liczbowego.

Organizacja badań statystycznych:

1. Przygotowanie badania,
2. Obserwacja statystyczna (zbiór danych uzyskanych w wyniku obserwacji nazywamy materiałem statystycznym)
3. Opracowanie i prezentacja materiału statystycznego
   - grupowanie,
   - zliczanie,
4. Opis lub wnioskowanie statystyczne

   (opis dotyczy tylko danej zbiorowości generalnej lub próby, wnioskowanie ma miejsce, gdy badanie jest reprezentacyjne i jego wyniki są uogólniane na całą populację generalną, z której została pobrana próba).

Statystyka

Szereg statystyczny – zbiór wyników obserwacji jednostek według pewnej cechy:

- wyliczające (szczegółowe) – uporządkowane wyłącznie wg wartości badanej cechy,
- rozdzielcze (strukturalne) – poszczególnym wariantom zmiennej przyporządkowane są odpowiadające im liczebności. Określają strukturę danej zbiorowości
  - cech niemierzalnych,
  - cech mierzalnych:
    - puktowe,
    - przedziałowe,
- przestrzenne (geograficzne) – przedstawiające rozmieszczenie wielkości statystycznych wg jednostek administracyjnych, częsci świata, itp.,
- dynamiczne (czasowe) – prezentują rozwój zjawisk w czasie.

Statystyka

Rozkład empiryczny zmiennej – przyporządkowanie kolejnym wartością zmiennej (x_i) odpowiadających im liczebności (n_i)

Rozkład empiryczny zmiennej – przyporządkowanie kolejnym wartością zmiennej (x_i) odpowiadających im liczebności (n_i)

Histogram – jeden z graficznych sposobów przedstawiania rozkładu empirycznego cechy. Składa się z szeregu prostokątów umieszczonych na osi współrzędnych. Prostokąty te są z jednej strony wyznaczone przez przedziały klasowe wartości cechy, natomiast ich wysokość jest określona przez liczebność (lub częstości) elementów wpadających do określonego przedziału klasowego.

Miary średnie

- średnie pozycyjne
  - mediana
  - dominanta
  - kwantyle (kwartyle, centyle, ...)
- miary klasyczne
  - średnia arytmetyczna
  - średnia geometryczna
  - średnia harmoniczna

Średnia arytmetyczna

Szereg wyliczający:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Szereg rozdzielczy punktowy (średnia ważona)

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N},$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Średnia arytmetyczna

Szereg rozdzielczy przedziałowy

$$\bar{x} = \frac{\mathring{x}_1 n_1 + \ldots + \mathring{x}_k n_k}{N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \mathring{x}_i n_i}{N},$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$

Średnia harmoniczna

Szereg wyliczający:

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

Szereg rozdzielczy punktowy

$$H = \frac{N}{\frac{n_1}{x_1} + \ldots + \frac{n_k}{x_k}} = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}},$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$

Średnia harmoniczna

Szereg rozdzielczy przedziałowy

$$H = \frac{N}{\frac{n_1}{\mathring{x}_1} + \ldots + \frac{n_k}{\mathring{x}_k}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\mathring{x}_i}},$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Średnia geometryczna

Szereg wyliczający:

$$G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

Szereg rozdzielczy punktowy

$$G = \sqrt[N]{x_1 n_1 \cdot x_2 n_2 \cdot \ldots \cdot x_k n_k}$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Średnia geometryczna

Szereg rozdzielczy przedziałowy

$$G = \sqrt[N]{\mathring{x}_1 n_1 \cdot \mathring{x}_2 n_2 \cdot \ldots \cdot \mathring{x}_k n_k}$$

gdzie $N = n_1 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Dominanta

Szereg rozdzielczy przedziałowy

$$D = x_D + \frac{n_D - n_{D-1}}{(n_D - n_{D-1}) + (n_D - n_{D+1})} \cdot i_D$$

gdzie:

- x_D – dolna granica przedziału dominanty,
- n_D – liczebność przedziału dominanty,
- n_{D-1}, n_{D+1} – liczebności przedziałów poprzedzającego i następującego po przedziale dominanty,
- i_D – rozpiętość przedziału dominanty.

Mediana

Szereg wyliczający:

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}}, & N - \textit{nieparzyste}, \\ \\ \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}, & N - \textit{parzyste}. \end{cases}$$

Kwartyle

Szereg rozdzielczy przedziałowy:

$$Q_1 = x_{Q_1} + \frac{\frac{N}{4} - \sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_{Q_1}} \cdot i_{Q_1}$$

Kwartyle

Szereg rozdzielczy przedziałowy:

$$Q_2 = Me = x_{Me} + \frac{\frac{N}{2} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i}{n_{Me}} \cdot i_{Me}$$

Kwartyle

Szereg rozdzielczy przedziałowy:

$$Q_3 = x_{Q_3} + \frac{\frac{3N}{4} - \sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_{Q_3}} \cdot i_{Q_3}$$

Kwartyle

gdzie:

- x_{Q_1}, x_{Me}, x_{Q_3} – dolne granice przedziałów, gdzie znajduje się Q_1, Me, Q_3
- N – ogólne liczebność zbiorowaości
- $\sum_{i=1}^{k-1} n_1$ – suma liczebności od przedziału pierwszego do tego, w którym znajduję się odpowiednio Q_1, Me, Q_3
- n_{Q_1}, n_{Me}, n_{Q_3} – liczebność odpowiednich przedziałów
- i_{Q_1}, i_{Me}, i_{Q_3} – długości odpowiednich przedziałów

Miary zmienności

Dają informację o rozproszeniu badanej cechy.

- miary pozycyjne
  - empiryczny obszar zmienności
  - odchylenie ćwiartkowe
- miary klasyczne
  - odchylenie standardowe
  - wariancja
  - odchylenie przeciętne

Empiryczny obszar zmienności

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Odchylenie przeciętne

Określa o ile wszystkie jednostki danej zbiorowości różnią się średnio ze względu na wartość od średniej arytmetycznej tej zmiennej.

Szereg wyliczający:

$$d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}|$$

Odchylenie przeciętne

Szereg rozdzielczy punktowy:

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| n_i$$

Szereg rozdzielczy przedziałowy:

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} |\mathring{x}_i - \bar{x}| n_i$$

Odchylenie ćwiartkowe

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Typowy obszar zmienności

$$Me - Q < x_{typ} < Me + Q$$

Wariancja

Szereg wyliczający:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Szereg rozdzielczy punktowy:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i$$

Szereg rozdzielczy przedziałowy:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$$

Odchylenie standardowe

$$s = \sqrt{s^2}$$

Typowy obszar zmienności

$$\bar{x} - s < x_{typ} < \bar{x} + s$$

Typowy obszar zmienności

$$Q < d < s$$

Klasyczny współczynnik zmienności

$$V_s = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

$$V_d = \frac{d}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Pozycyjny współczynnik zmienności

$$V_Q = \frac{Q}{Me} \cdot 100\%$$

$$V_{Q_1,Q_3} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

Miary asymetrii

- Rozkład symetryczny:

$$\bar{x} = D = Me$$

- Rozkład z asymetrią prawostronną:

$$\bar{x} > Me > D$$

- Rozkład z asymetrią lewostronną:

$$\bar{x} < Me < D$$

Wskaźnik asymetrii

$$W_s = \bar{x} - D$$

$$W_s = (Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)$$

- $W_s = 0$ – rozkład symetryczny
- $W_s > 0$ – asymatria prawostronna
- $W_s < 0$ – asymatria lewostronna

Współczynnik asymetrii

$$As = \frac{\bar{x} - D}{s}$$

$$As = \frac{\bar{x} - D}{d}$$

$$As = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{2Q_1}$$

Współczynnik asymetrii

$$-1 \leqslant As \leqslant 1$$

- $As = 0$ – rozkład symetryczny
- $As > 0$ – asymatria prawostronna
- $As < 0$ – asymatria lewostronna

Moment centralny r–tego rzędu

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^r n_i$$

Mamy:

- $m_1 = 0$
- $m_2 = s^2$

Moment centralny trzeciego rzędu

$$m_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^3 n_i$$

- $As = 0$ – rozkład symetryczny
- $As > 0$ – asymatria prawostronna
- $As < 0$ – asymatria lewostronna

Moment standaryzowany trzeciego rzędu

$$As = \frac{m_3}{s^3}$$

Moment standaryzowany czwartego rzędu

$$a_4 = \frac{m_4}{s^4}$$

- $a_4 = 3$ – rozkład normalny
- $a_4 > 3$ – asymatria wysmukły
- $a_4 < 3$ – asymatria spłaszczony

Eksces

$$e = a_4 - 3$$

Estymacja przedziałowa

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Przedziały ufności dla średniej

Załóżmy, że próba losowa $(X_1, \ldots, X_n)$ zastała pobrana z populacji o rozkładzie $N(m, s)$ o nieznanej wartości średniej m i znanym odchyleniu standardowym s.

Przedziałem ufności dla średniej m przy współczynniku ufności $1 - \alpha$ (dla $\alpha \in [0, 1]$) jest

$$P\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

gdzie z_α jest wartością odczytaną z tablic rozkładu $N(0, 1)$ taką, że

$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Estymacja przedziałowa

Wartości krytyczne rozkładu t-Studenta

$X \sim t_v$ - X zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z liczbą stopni swobody v,
α - poziom istotności,
$t_{v,\alpha}$ - wartość krytyczna - liczba taka, że $P(|X| > t_{v,\alpha}) = \alpha$

v \ a	0,400	0,300	0,200	0,100	0,050	0,025	0,025	0,010	0,005	0,001
1	1,3764	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	25,4519	25,4519	63,6559	127,3211	636,5776
2	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,2054	6,2054	9,9250	14,0892	31,5998
3	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	4,1765	5,8408	7,4532	12,9244
4	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	3,4954	3,4954	4,6041	5,5975	8,6101
5	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,1634	3,1634	4,0321	4,7733	6,8685
6	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	2,9687	3,7074	4,3168	5,9587
7	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	2,8412	3,4995	4,0294	5,4081
8	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	2,7515	3,3554	3,8325	5,0414
9	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	2,6850	3,2498	3,6896	4,7809
10	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,6338	3,1693	3,5814	4,5868
11	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	2,5931	3,1058	3,4966	4,4369
12	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,5600	2,5600	3,0545	3,4284	4,3178
13	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,5326	2,5326	3,0123	3,3725	4,2209
14	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,5096	2,5096	2,9768	3,3257	4,1403
15	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,4899	2,4899	2,9467	3,2860	4,0728
16	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,4729	2,4729	2,9208	3,2520	4,0149
17	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,4581	2,4581	2,8982	3,2224	3,9651
18	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,4450	2,4450	2,8784	3,1966	3,9217
19	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,4334	2,4334	2,8609	3,1737	3,8833
20	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,4231	2,4231	2,8453	3,1534	3,8496
21	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,4138	2,4138	2,8314	3,1352	3,8193
22	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,4055	2,4055	2,8188	3,1188	3,7922
23	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,3979	2,3979	2,8073	3,1040	3,7676
24	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,3910	2,3910	2,7970	3,0905	3,7454
25	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,3846	2,3846	2,7874	3,0782	3,7251
26	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,3788	2,3788	2,7787	3,0669	3,7067
27	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,3734	2,3734	2,7707	3,0565	3,6895
28	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,3685	2,3685	2,7633	3,0470	3,6739
29	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,3638	2,3638	2,7564	3,0380	3,6595
30	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,3596	2,3596	2,7500	3,0298	3,6460
31	0,8534	1,0541	1,3095	1,6955	2,0395	2,3556	2,3556	2,7440	3,0221	3,6335
32	0,8530	1,0535	1,3086	1,6939	2,0369	2,3518	2,3518	2,7385	3,0149	3,6218
33	0,8526	1,0530	1,3077	1,6924	2,0345	2,3483	2,3483	2,7333	3,0082	3,6109
34	0,8523	1,0525	1,3070	1,6909	2,0322	2,3451	2,3451	2,7284	3,0020	3,6007
35	0,8520	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,3420	2,3420	2,7238	2,9961	3,5911
40	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,3289	2,3289	2,7045	2,9712	3,5510
45	0,8497	1,0485	1,3007	1,6794	2,0141	2,3189	2,3189	2,6896	2,9521	3,5203
50	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,3109	2,3109	2,6778	2,9370	3,4960
55	0,8482	1,0463	1,2971	1,6730	2,0040	2,3044	2,3044	2,6682	2,9247	3,4765
60	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,2990	2,2990	2,6603	2,9146	3,4602
65	0,8472	1,0448	1,2947	1,6686	1,9971	2,2945	2,2945	2,6536	2,9060	3,4466
70	0,8468	1,0442	1,2938	1,6669	1,9944	2,2906	2,2906	2,6479	2,8987	3,4350
75	0,8464	1,0436	1,2929	1,6654	1,9921	2,2873	2,2873	2,6430	2,8924	3,4249
80	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,2844	2,2844	2,6387	2,8870	3,4164
85	0,8459	1,0428	1,2916	1,6630	1,9883	2,2818	2,2818	2,6349	2,8822	3,4086
90	0,8456	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,2795	2,2795	2,6316	2,8779	3,4019
95	0,8454	1,0421	1,2905	1,6611	1,9852	2,2775	2,2775	2,6286	2,8741	3,3958
100	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,2757	2,2757	2,6259	2,8707	3,3905

Przedziały ufności dla średniej

Załóżmy, że próba losowa $(X_1, \ldots, X_n)$ zastała pobrana z populacji o rozkładzie $N(m, s)$ o nieznanej wartości średniej m i nieznanym odchyleniu standardowym s.

Przedziałem ufności dla średniej m przy współczynniku ufności $1-\alpha$ (dla $\alpha \in [0,1]$) jest

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X} + t_{\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha,$$

gdzie S jest statystyką dla odchylenia standardowego z próby

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

oraz $t_{\alpha,n-1}$ jest wartością odczytaną z tablic rozkładu t–Studenta o $n-1$ stopniach swobody taką, że

$$P(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}) = 1-\alpha.$$

Przedziały ufności dla średniej

Załóżmy, że próba losowa $(X_1, \ldots, X_n)$ zastała pobrana z populacji o nieznanym rozkładzie o nieznanej wartości średniej m i nieznanym odchyleniu standardowym S.

W tym przypadku możemy budować przedziały ufności tylko dla dużych prób!

Przedziałem ufności dla średniej m przy współczynniku ufności $1 - \alpha$ (dla $\alpha \in [0, 1]$) jest

$$P\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

gdzie S jest statystyką dla odchylenia standardowego z próby

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

oraz z_α jest wartością odczytaną z tablic rozkładu $N(0, 1)$ taką, że

$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Estymacja przedziałowa

n / α	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,1	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
1	0,0002	0,0006	0,0014	0,0025	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	4,2179	4,7093	5,4119	6,6349
2	0,0201	0,0404	0,0609	0,0816	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	6,4378	7,0131	7,8240	9,2103
3	0,1148	0,1848	0,2451	0,3002	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	8,3112	8,9473	9,8374	11,3449
4	0,2971	0,4294	0,5351	0,6271	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	10,0255	10,7119	11,6678	13,2767
5	0,5543	0,7519	0,9031	1,0313	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	11,6443	12,3746	13,3882	15,0863
6	0,8721	1,1344	1,3296	1,4924	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	13,1978	13,9676	15,0332	16,8119
7	1,2390	1,5643	1,8016	1,9971	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	14,7030	15,5091	16,6224	18,4753
8	1,6465	2,0325	2,3101	2,5366	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	16,1708	17,0105	18,1682	20,0902
9	2,0879	2,5324	2,8485	3,1047	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	17,6083	18,4796	19,6790	21,6660
10	2,5582	3,0591	3,4121	3,6965	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	19,0207	19,9219	21,1608	23,2093
11	3,0535	3,6087	3,9972	4,3087	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	20,4120	21,3416	22,6179	24,7250
12	3,5706	4,1783	4,6009	4,9385	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	21,7851	22,7418	24,0540	26,2170
13	4,1069	4,7654	5,2210	5,5838	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	23,1423	24,1249	25,4715	27,6882
14	4,6604	5,3682	5,8556	6,2426	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	24,4855	25,4931	26,8728	29,1412
15	5,2293	5,9849	6,5032	6,9137	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	25,8162	26,8479	28,2595	30,5779
16	5,8122	6,6142	7,1625	7,5958	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	27,1356	28,1907	29,6332	31,9999
17	6,4078	7,2550	7,8324	8,2878	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	28,4450	29,5227	30,9950	33,4087
18	7,0149	7,9062	8,5120	8,9889	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	29,7451	30,8447	32,3462	34,8053
19	7,6327	8,5670	9,2004	9,6983	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	31,0367	32,1577	33,6874	36,1909
20	8,2604	9,2367	9,8971	10,4154	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	32,3206	33,4624	35,0196	37,5662
21	8,8972	9,9146	10,6013	11,1395	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	33,5972	34,7593	36,3434	38,9322
22	9,5425	10,6000	11,3125	11,8703	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	34,8673	36,0492	37,6595	40,2894
23	10,1957	11,2926	12,0303	12,6072	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	36,1311	37,3323	38,9683	41,6384
24	10,8564	11,9918	12,7543	13,3498	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	37,3891	38,6093	40,2704	42,9798
25	11,5240	12,6973	13,4840	14,0978	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	38,6416	39,8804	41,5661	44,3141
26	12,1981	13,4086	14,2190	14,8509	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	39,8891	41,1460	42,8558	45,6417
27	12,8785	14,1254	14,9592	15,6087	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	41,1318	42,4066	44,1400	46,9629
28	13,5647	14,8475	15,7042	16,3711	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	42,3699	43,6622	45,4188	48,2782
29	14,2565	15,5745	16,4538	17,1377	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	43,6038	44,9132	46,6927	49,5879
30	14,9535	16,3062	17,2076	17,9083	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	44,8336	46,1599	47,9618	50,8922
40	22,1643	23,8376	24,9437	25,7989	26,5093	29,0505	51,8051	55,7585	56,9459	58,4278	60,4361	63,6907
50	29,7067	31,6639	32,9509	33,9426	34,7643	37,6886	63,1671	67,5048	68,8039	70,4230	72,6133	76,1539
60	37,4849	39,6994	41,1504	42,2656	43,1880	46,4589	74,3970	79,0819	80,4820	82,2251	84,5799	88,3794
70	45,4417	47,8934	49,4953	50,7243	51,7393	55,3289	85,5270	90,5312	92,0241	93,8813	96,3875	100,4252
80	53,5401	56,2128	57,9553	59,2902	60,3915	64,2778	96,5782	101,8795	103,4588	105,4221	108,0693	112,3288
90	61,7541	64,6347	66,5093	67,9437	69,1260	73,2911	107,5650	113,1453	114,8057	116,8688	119,6485	124,1163
100	70,0649	73,1422	75,1419	76,6705	77,9295	82,3581	118,4980	124,3421	126,0794	128,2367	131,1417	135,8067

Przedziały ufności dla wariancji

Załóżmy, że próba losowa $(X_1, \dots, X_n)$ zastała pobrana z populacji o rozkładzie $N(m, \sigma)$ o nieznanej wartości średniej m i nieznanej wariancji σ^2. **Dla małej próby $n \leqslant 30$.**

Przedziałem ufności dla wariancji σ^2 przy współczynniku ufności $1 - \alpha$ (dla $\alpha \in [0, 1]$) jest

$$P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1 - \alpha,$$

gdzie $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ oraz $\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}$ są wartościami odczytanymi z tablic rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody takimi, że

$$P(\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \alpha.$$

Przedziały ufności dla odchylenia standardowego

Załóżmy, że próba losowa $(X_1, \ldots, X_n)$ zastała pobrana z populacji o rozkładzie $N(m, \sigma)$ o nieznanej wartości średniej m i nieznanej wariancji σ^2. **Dla dużej próby $n > 30$.**

Przedziałem ufności dla odchylenia standardowego σ przy współczynniku ufności $1 - \alpha$ (dla $\alpha \in [0, 1]$) jest

$$P\left(S - z_\alpha \frac{S}{\sqrt{2n}} < \sigma < S + z_\alpha \frac{S}{\sqrt{2n}}\right) = 1 - \alpha,$$

gdzie z_α jest wartością odczytaną z tablic rozkładu $N(0, 1)$ taką, że

$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha.$$