

Matematyka z elementami statystyki

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Pochodna funkcji

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oraz $x, x_0 \in (a, b)$ będą różnymi punktami przedziału (a, b) . Wyrażenie

$$I_f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f między punktami x i x_0 .

Jeśli $h = x - x_0$, to możemy też napisać

$$I_f(x_0 + h, x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pochodna funkcji

Jeśli istnieje granica ilorazu $I_f(x_0 + h, x_0)$ przy $h \rightarrow 0$, to granicę tę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f'(x_0)$, tzn.:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jeśli f ma pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0 .

Jeżeli f ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b) , to mówimy, że f jest różniczkowalna w zbiorze (a, b) .

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to f jest ciągła w punkcie x_0 .

Interpretacja fizyczna pochodnej:

Niech funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$.

Niech $x_0, x_0 + h \in (a, b)$.

Rozważmy punkty:

$$A = (x_0, f(x_0)), \quad B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Punkty A i B należą do wykresu funkcji f . Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B jest postaci

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Pochodna funkcji

lub równoważnie:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}x + f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}x_0$$

Współczynnik kierunkowy tej prostej, to iloraz różnicowy $I_f(x_0 + h, x_0)$.

Jeśli $h \rightarrow 0$ (tzn. punkt B zbliża się do punktu A) otrzymujemy:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Prostą o takim równaniu nazywamy prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Pochodne funkcji elementarnych:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Twierdzenie

Jeśli funkcje $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to funkcje $f + g$, $f - g$, λf , $f \cdot g$ również są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz:

- ▶ $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- ▶ $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$,
- ▶ $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- ▶ $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Jeśli, ponadto, $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

- ▶ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Twierdzenie

Założmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i odwracalną. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $f'(x_0) \neq 0$, to $y_0 = f(x_0)$ jest punktem wewnętrznym przedziału $f((a, b))$ oraz f^{-1} jest funkcją różniczkowalną w punkcie y_0 oraz zachodzi wzór

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Twierdzenie

Jeśli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną w punkcie $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$, to funkcja

$$h = g \circ f$$

jest określona i różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz zachodzi wzór

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Pochodne wyższych rzędów

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$.

- ▶ Jeśli funkcja f' jest różniczkowalna, to

$$f'' = (f')'$$

- ▶ Jeśli, dla $n \in \mathbb{N}$, funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna, to

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem, $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że funkcja jest *klasy* $C^n(P)$ jeżeli n -ta pochodna funkcji f istnieje w przedziale P i jest funkcją ciągłą na tym przedziale.

Oznaczenie:

$$f \in C^n(P)$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie Rolle'a

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to

$$\bigvee_{\xi \in (a, b)} f'(\xi) = 0.$$

Twierdzenie Lagrange'a

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) , to

$$\bigvee_{\xi \in (a, b)} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie Cauchy'ego

Jeśli funkcje $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne w przedziale (a, b) , to:

$$\exists \xi \in (a, b) \quad [f(b) - f(a)] g'(\xi) = [g(b) - g(a)] f'(\xi).$$

Twierdzenie Taylora

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że $h \in \mathbb{R}$ jest taką liczbą, że $x_0 + h \in (a, b)$. Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $(n - 1)$ w przedziale $[x_0, x_0 + h]$ oraz f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale $(x_0, x_0 + h)$, to istnieje takie $\theta \in (0, 1)$, że

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n(x_0, h),$$

gdzie

$$R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Szereg Taylora

Jeżeli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w pewnym otoczeniu U_{x_0} punktu $x_0 \in (a, b)$ pochodne dowolnego rzędu i dla $x \in U_{x_0}$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0, h) = 0,$$

to

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Regułą de l'Hospitala

Twierdzenie de l'Hospitala

Niech A będzie jednym ze zbiorów postaci:

$$A = (a, x_0), \text{ gdzie } -\infty \leq a < x_0 \leq +\infty,$$

$$A = (x_0, a), \text{ gdzie } -\infty \leq x_0 < a \leq +\infty,$$

$$A = (a, x_0) \cup (x_0, b), \text{ gdzie } -\infty \leq a < x_0 < b \leq +\infty.$$

Założmy, że funkcje $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in A$. Założmy dodatkowo, że zachodzi jeden z następujących warunków

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Jeśli istnieje granica, bądź granica niewłaściwa $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz ma ekstremum lokalne w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Twierdzenie

Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeśli $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 0$ dla $x \in P$, to f jest stała.

Twierdzenie

Założmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna.

- ▶ Jeżeli $f' > 0$ w przedziale (a, b) , to f jest silnie rosnąca w przedziale (a, b) .
- ▶ Jeżeli $f' < 0$ w przedziale (a, b) , to f jest silnie malejąca w (a, b) .

Twierdzenie

Założmy, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna.

- ▶ Jeżeli $f'' > 0$ w przedziale (a, b) , to f jest wypukła w przedziale (a, b) .
- ▶ Jeżeli $f'' < 0$ w przedziale (a, b) , to f jest wklęsła w przedziale (a, b) .

Twierdzenie

Jeśli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $f'(x_0) = 0$ dla pewnego punktu $x_0 \in (a, b)$ oraz f' zmienia znak w punkcie x_0 , to f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 . Jest to:

- ▶ maksimum, jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest pewną stałą,
- ▶ minimum, jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest pewną stałą.

Twierdzenie

Jeśli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$, to f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i jest to:

- ▶ maksimum, jeśli $f''(x_0) < 0$,
- ▶ minimum, jeśli $f''(x_0) > 0$.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Założmy, że $x_0 \in (a, b)$ oraz $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest

- ▶ wypukła (wklęsła) w przedziale (a, x_0) ,
- ▶ wklęsła (wypukła) w przedziale (x_0, b) .

Punkt x_0 nazywamy wówczas *punktem przegięcia* funkcji f .

Twierdzenie

Jeśli $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 , a $x_0 \in (a, b)$ jest punktem przegięcia funkcji f , to

$$f''(x_0) = 0$$

Asymptoty

Założmy, że $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Prostą o równaniu $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną prawostronną, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Wtedy:

- ▶ $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,
- ▶ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

Uwaga: Dla $-\infty$ asymptotę ukośną lewostronną definiujemy analogicznie.

Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową* funkcji f , jeśli f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu c oraz

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$$

Całka nieoznaczona

Niech $-\infty \leq a < b \leq \infty$ oraz niech będzie dana funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Każdą funkcję różniczkowalną $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

$$F' = f$$

nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f .

Jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to rodzinę wszystkich jej funkcji pierwotnych nazywamy *całką nieoznaczoną* z funkcji f i oznaczamy $\int f$ lub $\int f(x)dx$, tzn.

$$\int f = \int f(x)dx =$$

$$= \{F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ jest różniczkowalna na } (a, b) \wedge F' = f\}$$

O funkcji, która ma funkcję pierwotną mówimy, że jest *całkowalna*.

Podstawowe całki:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc} \sin x + c$

Całka nieoznaczona

Własności całki nieoznaczonej

Niech $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi. Wówczas $f + g$ oraz λf , dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, są funkcjami całkowalnymi oraz

- ▶ $\int (f + g) = \int f + \int g$,
- ▶ $\int \lambda f = \lambda \int f$.

Uwaga

Jeśli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

Całka nieoznaczona

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi oraz $f'g$ ma pierwotną. Wówczas funkcja fg' również ma pierwotną oraz zachodzi wzór

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną, a $\varphi: (c, d) \rightarrow (a, b)$ funkcją różniczkowaną. Wówczas $(f \circ \varphi)\varphi'$ jest całkowna oraz

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx \right) \circ \varphi.$$

Całka oznaczona

Wzór Newtona–Leibniza

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, a funkcja $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f , to

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a)$$

gdzie symbolem

$$\int_a^b f(x) dx$$

oznaczamy całkę oznaczoną funkcji f względem przedziału $[a, b]$.