

Matematyka z elementami statystyki

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Granica ciągu

Niech $Y \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{N}$.

Dowolną funkcję $f: A \rightarrow Y$ nazywamy *ciągą* elementów zbioru Y .

Najczęściej mamy: $A = \mathbb{N}$, tzn. $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$.

Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to powiemy, że ciąg jest ciągiem rzeczywistym.

Oznaczenie: Zamiast pisać $f(n)$ piszemy a_n .

Ciąg (a_n) jest **ograniczony**, jeżeli

$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq M$$

Definicja zbieżności ciągów

Ciąg rzeczywisty (a_n) jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}$ jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} |a_n - g| < \varepsilon$$

Inaczej, mówimy też, że ciąg (a_n) ma granicę w g i piszemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Uwaga

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$
- ▶ Jeżeli $a_n = a$ (tzn. ciąg a_n jest ciągiem stałym), to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Twierdzenie

Jeżeli ciąg rzeczywisty jest zbieżny, to każdy jego podciąg też jest zbieżny do tej samej granicy.

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Z każdego rzeczywistego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Własności ciągów zbieżnych

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\blacktriangleright \text{Jeżeli dodatkowo } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Niech (a_n) , (b_n) i (c_n) będą ciągami liczb rzeczywistych. Jeżeli

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

Przykłady:

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b), \quad a, b \geq 0.$

Wniosek

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz (b_n) jest ciągiem ograniczonym, to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie o zachowaniu nierówności w granicy

Jeśli $A \leq a_n \leq B$, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to

$$A \leq a \leq B$$

Wniosek

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ oraz

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq b_n$$

to

$$a \leq b$$

Granica ciągu

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $+\infty$* jeżeli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} a_n \geq M$$

co zapisujemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$.

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do $-\infty$* jeżeli

$$\bigwedge_{M<0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} a_n \leq M$$

co zapisujemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty$.

Uwaga: W powyższych sytuacjach mówimy, że ciąg ma granicę niewłaściwą.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu rozbieżnego do $+\infty$ (rozbieżnego do $-\infty$) jest rozbieżny do $+\infty$ (rozbieżny do $-\infty$).

Twierdzenie

- ▶ Jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony, a ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

- ▶ Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

- ▶ Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$$

Inaczej:

- ▶ $\infty + a = a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$,
- ▶ jeżeli $a > 0$, to:
 $\infty \cdot a = \infty$, $-\infty \cdot a = -\infty$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{-\infty}{a} = -\infty$,
- ▶ jeżeli $a < 0$, to:
 $\infty \cdot a = -\infty$, $-\infty \cdot a = \infty$, $\frac{\infty}{a} = -\infty$, $\frac{-\infty}{a} = \infty$,
- ▶ $\frac{a}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$.

Symbole nieoznaczone:

- ▶ $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$,
- ▶ 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Niech dany będzie ciąg rzeczywisty (a_n) . Definiujemy nowy ciąg (S_n) wzorami:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

\vdots

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Szeregi liczbowe

Ciąg (S_n) nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazach a_1, a_2, \dots i zapisujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Liczbę S_n nazywamy n -tą sumą częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeśli istnieje

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R},$$

to liczbę S nazywamy *sumą szeregu* i mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*.

W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest *rozbieżny*.
Ciąg (a_n) nazywamy *ciągami wyrazów szeregu* (S_n) .

Twierdzenie

Założmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne. Wówczas zbieżne są również następujące szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$$

dal $\lambda \in \mathbb{R}$. Ponadto zachodzą wzory

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg jest zbieżny, to ciąg jego wyrazów jest zbieżny do zera.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) spełniają następujące założenia

$$a_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz istnieje $g \geq 0$ takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$$

to

- ▶ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
- ▶ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) spełniają następujące założenia

$$a_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz istnieje $g \geq 0$ takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$$

to

- ▶ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
- ▶ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,

Kryterium Leibniza

Jeżeli ciąg (a_n) jest malejący oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

jest zbieżny.

Kryterium porównawcze

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ spełniają nierówności

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

to

- ▶ jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- ▶ jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Granica funkcji

Dowolny przedział otwarty (a, b) zawierający x nazywamy *otoczeniem* punktu x .

Niech $x \in (a, b)$. Wówczas zbiór

$$(a, x) \cup (x, b)$$

nazywamy *sąsiedztwem* punktu x .

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ jeżeli w każdym sąsiedztwie punktu x_0 znajdują się elementy zbioru A , tzn. istnieje ciąg (a_n) taki, że

$$a_n \in A \setminus \{x_0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczamy symbolem A^d .

Definicja Heinego

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$. Wtedy funkcja f ma *granicę w punkcie* x_0 równą $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy w postaci

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) elementów zbioru $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Definicja Cauchy'ego

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym, a $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i $x_0 \in D^d$. Wtedy funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą $g \in \mathbb{R}$ jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} (0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon)$$

Granice jednostronne:

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ Mówimy, że f ma *granice lewostronną* w punkcie $x_0 \in (a, b]$ równą g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in (a, b)$, $x_n < x_0$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

- ▶ Mówimy, że f ma *granice prawostronną* w punkcie $x_0 \in [a, b)$ równą g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in (a, b)$, $x_n > x_0$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica funkcji

Symbolem

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

będziemy oznaczali granicę lewostronną.

Symbolem

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

będziemy oznaczali granicę prawostronną.

Twierdzenie

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Odwzorowanie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ granicę wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice lewostronna i prawostronna funkcji f w punkcie x_0 i są sobie równe.

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje f i g mają granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

to funkcje $f + g$, $f \cdot g$ oraz λf również mają granice w punkcie x_0 oraz

- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$,
- ▶ $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda a$,
- ▶ jeśli dodatkowo $b \neq 0$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Własności granicy funkcji

Twierdzenie o trzech funkcjach

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeśli funkcje $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla wszystkich x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$$

to istnieje granica funkcji g w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$$

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje f i g mają granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$$

oraz

$$f(x) \leq g(x)$$

dla wszystkich x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0 , to

$$a \leq b$$

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Każda rzeczywista funkcja monotoniczna w przedziale $P \subseteq \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie $x_0 \in \text{int}P$ obydwie granice jednostronna

Uwaga: Granice te nie muszą być sobie równe.

Granica funkcji

Niech $a \in \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę równą g w $+\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów zbioru $(a, +\infty)$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Mówimy, że funkcja $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę równą g w $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$$

jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów zbioru $(-\infty, a)$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Uwaga:

Możliwa jest sytuacja, kiedy w definicji granicy funkcji w punkcie $g = +\infty$ lub $g = -\infty$. Wtedy, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

to mówimy, że f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą.

Funkcja ciągła w punkcie

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. Funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- ▶ x_0 jest punktem izolowanym zbioru D , tzn.

$$\bigvee_{\varepsilon > 0} (D \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \emptyset$$

(x_0 nie jest punktem skupienia zbioru D),

- ▶ jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru D , to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Twierdzenie

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym, a $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0 jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon)$$

Funkcja ciągła

Mówimy, że funkcja jest *ciągła*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli funkcje $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in D$, to ciągłe w punkcie x_0 są również funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, λf (dla $\lambda \in \mathbb{R}$). Jeśli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również jest ciągła w punkcie x_0

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła w punkcie $x_0 \in D$. Jeżeli ciąg (x_n) elementów zbioru D jest taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$. Jeśli funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 , a funkcja $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $f(x_0)$, to odwzorowanie $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe w punkcie x_0 .

Niech dany będzie niepusty zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum* jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D} f(x) \leq f(x_0)$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *minimum* jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D} f(x) \geq f(x_0)$$

Niech dany będzie niepusty zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum lokalne* jeżeli istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że

$$\bigwedge_{x \in D \cap U} f(x) \leq f(x_0)$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *minimum lokalne* jeżeli istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że

$$\bigwedge_{x \in D \cap U} f(x) \geq f(x_0)$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje oba ekstrema (maksimum oraz minimum).

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Własność Darboux

Mówimy, że y leży między a i b jeżeli

$$a < y < b \quad \text{lub} \quad b < y < a.$$

Niech $\subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem, a $P \subseteq D$ będzie przedziałem. Mówimy, że funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux w przedziale P , gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in P$, $x_1 < x_2$ oraz dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$ jeżeli y_0 leży między $f(x_1)$ i $f(x_2)$, to istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ taki, że

$$y_0 = f(x_0)$$

Twierdzenie

Każda rzeczywista funkcja ciągła w przedziale ma w tym przedziale własność Darboux.