Matematyka z elementami statystyki

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Funkcje

Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami ($X, Y \neq \emptyset$).

$f\colon X \to Y \leftrightarrow$ **funkcja**, jeżeli każdemu elementowi x zbioru X przyporządkowany jest dokładnie jeden element y zbioru Y.

X – dziedzina funkcji f
Y – przeciwdziedzina funkcji f

jeśli $x \in X$, to piszemy: $y = f(x)$ – wartość funkcji f dla argumentu x

Funkcje

Niech $f\colon X_1 \to Y_1$ i $g\colon X_2 \to Y_2$ będą funkcjami. Wtedy

$$f = g$$

jeżeli

- $X_1 = X_2$,
- $\bigwedge\limits_{x \in X_1} f(x) = g(x)$

Funkcje

Niech $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

- Zbiór
$$f(A) = \{y \in Y \colon \bigvee_{x \in A} y = f(x)\}$$
nazywamy obrazem zbioru A poprzez funkcję f.
- Zbiór
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$$
nazywamy przeciwobrazem zbioru B poprzez funkcję f.

Funkcje

Niech $f \colon X \to Y$. Wtedy:

- f nazywamy surjekcją (odwzorowaniem „na”), jeśli $f(X) = Y$,
- f nazywamy funkcją różnowartościową, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

  albo

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),$$

- f jest odwracalna, jeżeli jest surjekcją i jest różnowartościowa.

Funkcje

Złożenie funkcji
Niech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Wtedy odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in X$$

nazywamy złożeniem (superpozycją) funkcji f i g.

Uwaga: Składanie funkcji nie jest przemienne, tzn. $f \circ g \neq g \circ f$!

Funkcje

Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, tzn.:

- albo jest skończony
- albo jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$.

Zbiory, które nie są przeliczalne, nazywamy zbiorami *nieprzeliczalnymi*.
Przykłady: $\mathbb{R}$, (a, b), $[a, b]$ dla $a < b$.

Funkcje

Iloczyn kartezjański

$X, Y \neq \emptyset$

$$X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X \wedge y \in Y\}$$

Jeśli $X = Y$, to będziemy pisali $X^2 = X \times X$.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \neq \emptyset$, to

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon \bigwedge_{i \in \{1, \ldots, n\}} x_i \in X_i\}$$

Jeśli $X = X_1 = \ldots = X_n$, to piszemy: $X^n = X_1 \times \ldots \times X_n$.
Jeśli $X = \mathbb{R}$, to $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-razy}$.

Funkcje

Wykres odwzorowania

$f : X \to Y$

$$gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Twierdzenie:

Jeśli $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem odwracalnym, to odwzorowanie $g : Y \xrightarrow{na} X$ jest odwzorowaniem odwrotnym do f wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = x \quad \wedge \quad \bigwedge_{y \in Y} (f \circ g)(y) = y$$

Zasada indukcji matematycznej

Jeśli S jest podzbiorem liczb naturalnych o następujących własnościach

- $n_o \in S$,
- $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,

to $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_0\}$.

Nierówność Bernoulliego

Dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$, $x \neq 0$ zachodzi nierówność:

$$(1+x)^n > 1 + nx, \qquad dla\ n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$$

Zbiór ograniczony

$A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

- A jest ograniczony z góry $\iff \bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} x \leqslant M$,
- A jest ograniczony z dołu $\iff \bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} m \leqslant x$,
- A jest ograniczony $\iff$ A jest ograniczony z góry i z dołu

$$\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} |x| \leqslant M$$

Aksjomat ciągłości:
Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry, to istnieje najmniejsza liczba rzeczywista M taka, że

$$\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M$$

Taką liczbę M nazywamy *kresem górnym zbioru A* i oznaczamy $supA$

$M = supA \iff$

- $\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M$
- $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x \in A} x > M - \varepsilon$

Kres dolny zbioru A ograniczonego z dołu:
Oznaczamy *infA*

$M = infA \iff$

- $\bigwedge_{x \in A} x \geqslant M$
- $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x \in A} x < M - \varepsilon$

Pewnik Archimedesa
Jeśli $x > 0$, to dla dowolnego $y > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$y \leqslant nx$$

Funkcje monotoniczne:

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$

- f – rosnąca $\iff \bigwedge_{x_1,x_2\in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- f – niemalejąca $\iff \bigwedge_{x_1,x_2\in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$
- f – stała $\iff \bigwedge_{x_1,x_2\in D} f(x_1) = f(x_2)$
- f – nierosnąca $\iff \bigwedge_{x_1,x_2\in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$
- f – malejąca $\iff \bigwedge_{x_1,x_2\in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Parzystość funkcji:
Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że

$$x \in D \Rightarrow (-x) \in D$$

Wtedy $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest:

- parzysta $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} f(-x) = f(x)$
- nieparzysta $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} f(-x) = -f(x)$

Wypukłość:

$P \subseteq \mathbb{R}$ – przedział o końcach a i b ($a < b$), $f\colon P \to \mathbb{R}$

- f – wypukła $\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{\lambda\in[0,1]} \bigwedge_{x,y\in P} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
- f – wklęsła $\Leftrightarrow$
$$\bigwedge_{\lambda\in[0,1]} \bigwedge_{x,y\in P} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Funkcje elementarne

- Wielomiany,
- Funkcje wymierne,
- Funkcja wykładnicza,
- Funkcja logarytmiczna,
- Funkcje trygonometryczne: $\sin$, $\cos$, tg, ctg,
- Funkcje cyklometryczne (kołowe):
  - $\arcsin$
  - $\arccos$,
  - arctg,
  - arcctg.