1 Elementy teorii równań różniczkowych zwyczajnych

Rónania różniczkowe są jednym z najczęściej stosowanych narzędzi matematycznych służących do opisu m.in. procesów ewolucyjnych.

1.1 Uwagi wstępne.

W całym rozdziale I będzie oznaczać przedział domknięty na prostej, tzn.:

$$I = [\alpha, \beta],$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha < \beta$.

Niech $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) będzuie odwzorowaniem o składowych $g_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Przypomnijmym, że przez pochodną odwzorowania g rozmumiemy wektor

$$g'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)), \qquad t \in I.$$

Rozszerzymy teraz pojęcie całki Riemanna na odwzorowania wektorowe. Powiemy, że odwzorowanie $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest całkowalne w sensie Riemanna w przedziale I, jeśli każda z funkcji składowych g_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ jest całkowalna w przedziale I. Wtedy wektor, którego i-tą składową jest liczba

$$\int_\alpha^\beta g_i(t)dt, \qquad i \in \{1, \ldots, n\},$$

nazywamy całką Riemanna odwzorowania g w prfzedziale I i oznaczamy symbloem

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt.$$

Zatem, jeśli odwzorowanie $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ ma całkowalne składowe $g_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, to

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta g_1(t)dt, \ldots, \int_\alpha^\beta g_n(t)dt \right).$$

Z powyższej definicji wynika następujący wniosek:

Wniosek 1. *Jeśli $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem ciągłym, to dla dowolnego $t_0 \in I$ odwzorowanie $G\colon I \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem*

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds, \qquad t \in I$$

jest różniczkowalne w przedziale I oraz

$$G'(t) = g(t)$$

dla $t \in I$.

1.2 Równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem niepustym i ograniczonym oraz załóżmy, że dane jest ciągłe odwzorowanie

$$f\colon I \times G \to \mathbb{R}^n.$$

Będziemy poszukiwali takich funkcji $x\colon I \to G$, że dla każdego $t \in I$ spełniona jest równość

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Powyższą równość krócej będziemy zapisywali w następujący sposób:

$$x' = f(t, x). \tag{1}$$

Równość (1) będziemy nazywali równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu, a każdą funkcję różniczkowalną $x\colon I \to G$ taką, że równość $x'(t) = f(t, x(t))$ jest spełniona dla dowolnego $t \in I$, będziemy nazywali rozwiązaniem równania (1).

Uwaga 1. Z ciągłości odwzorowania f wynika, że każde rozwiązanie x równania (1) jest klasy C^1 w przedziale I.

Przykład 1. Niech $f\colon [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$f(t, x) = 3t^2.$$

Wtedy równanie różniczkowe (1) przyjmuje postać

$$x' = 3t^2.$$

`Poszukujemy tutaj rozwiązań równania różniczkowego. Inaczej, szukamy wszystkich funkcji $x(t)$ o tej własności, że $x'=3t^2$.`

`W jaki sposób będziemy postępować?`

Zcałkujmy względem zmiennej t nasze równanie różniczkowe:

$$\int x'(t)dt = \int 3t^2 dt$$

Wtedy:

$$x(t) = t^3 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Można sprawdzić, że każda funkcja dana powyższym wzotrem jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania różniczkowego.

`Można zauważyć, że takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.`

W dalszym ciągu będziemy poszukiwać takich rozwiązań równania (1), któe spełniają równość

$$x(t_0) = x_0$$

dla danego $t_0 \in I$ oraz $x_0 \in G$. W tym przypadku będziemy mówić, że rozwiązanie równania (1) spełnia warunek początkowy $x(t_0) = x_0$. Problem szukania rozwiązań równania (1) spełniającego warunek brzegowy nazywamy problemem Cauchy'ego, co zapisujemy symbolicznie

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Rozwiązanie problemu Cauchy'ego polega na znalezieniu wszystkich rozwiązań rónania (1) spełniających warunek początkowy $x(t_0) = x_0$.

Przykład 2. `Powróćmy do równania z poprzedniego przykłądu.`
Rozpatrzmy równanie

$$x' = 3t^2$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = 0.$$

Wiemy, że rozwiązania równania są funkcjami postaci

$$x(t) = t^3 + c.$$

Wtedy otrzymujemy, że

$$0 = x(0) = 0^3 + c = c$$

co oznacza, że $c = 0$, a zatem rozwiązaniem równania z warunkiem poxczątkowym $x(0) = 0$ jest funkcja

$$x(t) = t^3.$$

Rozpatrzmy teraz to samo równanie z innym warunkiem początkowym:

$$x(1) = 3.$$

Wtedy:

$$3 = x(1) = 1^3 + c$$

tzn. $c = 2$. Zatem rozwiązanie równania z warunkiem poxczątkowym $x(1) = 3$ jest postaci:

$$x(t) = t^3 + 2.$$

`Pokazuje to, że warunek początkowy jest istotny.`

założmy, że odwzorowanie $x\colon I \to G$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (2). Dla dowolnego $t \in I$ zachodzą zatem równości:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

oraz

$$x(t_0) = x_0.$$

Całkując powyższą równość dostajemy:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad s \in I,$$

a stąd i z drugiej równości otrzymujemy, że:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad t \in I. \tag{3}$$

Uwaga 2. Jeśli $f\colon I \times G \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem ciągłym, to zbiór rozwiązań problemu Cauchy'ego (2) jest równy zbiorowi rozwiązań równania (3).

1.3 Problem Cauchy'ego dla równania różniczkowego pierwszego rzędu.

Twierdzenie 1 (Picarda, o istnieniu i jednoznaczności)**.** *Niech $K = K(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ oznacza kulę otwartą o środku w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $r > 0$, a $I = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem na osi liczb rzeczywistych. Jeśli odwzorowanie $f\colon I \times K \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłe oraz istnieją stałe $r_0 \in (0, r)$, $L > 0$ takie, że dla dowolnych $(t, x_1), (t, x_2) \in I \times K(x_0, r_0)$ zachodzi nierónósć*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|,$$

to istnieje takie $\tau \in (0, a]$, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

ma dokłądnie jedno rozwiązanie $x\colon [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \to K(x_0, r_0)$.

Uwaga 3. Dowód powyższego twierdzenie podpowiada metodę poszukiwania rozwiązania (jedynego) problemu Cauchy'ego (2). Wystarczy skonstuować ciąg:

$$x_0(t) = x_0$$

oraz

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds.$$

Wtedy funkcja

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

jest jedynym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (2).

Przykład 3. Niech $f\colon [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją postaci

$$f(t, x) = x.$$

Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Można zauważyć, że założenia twierdzenia Picarda są spełnione. Zatem:

$$x_0(t) = 1,$$

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1(s)ds = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t x_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}.$$

Można pokazać, że:

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!},$$

a zatem

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

jest rozwiązaniem rozważanego problemu.

Twierdzenie 2 (Peano, o istnieniu)**.** *Jeśli istnieje taka kula otwarta $K(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, że odwzorowanie $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłe w zbiorze $I \times K(x_0, r)$, to istnieje takie $\tau > 0$, że problem Cauchy'ego (2) ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.*

Przykład 4. Rozpatrzmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(t, x) = \sqrt{|x|}.$$

Nie spełnia ona założeń twierdzenia Picarda, ale jest ciągła, zatem spełnia założenia twierdzenia Peano. Rozpatrzmy problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Można zauważyć, że każda funkcja postaci

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t+b)^2, & t \leqslant -b, \\ 0, & t \in (-b, a), \\ (t-a)^2, & t \geqslant a, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem powyższego problemu. Oznacza, to, że powyższy problem ma nieskończenie wiele rozwiązań.

1.4 Przegląd szczególnych typów równań różniczkowych.

Zajmienmy się teraz pewnymi szczególnymi typami rónań różniczkowych, w któych funkcja f będzie miała jedną składową, tzn. $n = 1$.

1.4.1 Równanie o zmiennych rozdzielonych.

Niecg $f\colon I \times (a, b) \to \mathbb{R}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będzie funkcją postaci

$$f(t, x) = g(t)h(x),$$

gdzie $g\colon I \to \mathbb{R}$ oraz $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi. Równanie różniczkowe postaci

$$x' = g(t)h(x) \tag{4}$$

nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że funkcje* $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *oraz* $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *są ciągłe oraz* $(t_0, x_0) \in (\alpha, \beta) \times (a, b)$ *jest danym punktem. Jeśli* $g(t_0)h(x_0) \neq 0$*, to istnieje taka stała dodatnia* τ_1*, że problem Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x' = g(t)h(x), \\ x(t_0 = x_0, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x\colon [t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_1] \to \mathbb{R}$*.*

Uwaga 4. Jeżeli w powyższym twierdzeniu opóścimy założenie, że $g(t_0)h(x_0) \neq 0$, to problem Cauchy'ego może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Na przykłąd, można pokazać, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = 3x^{\frac{2}{3}}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

ma dwa rozwiązania:

$$x(t) = 0$$

oraz

$$x(t) = t^3.$$

Przykład 5. Rozważmy problem

$$\begin{cases} x' = \frac{2x}{t}, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Można zauważyć, że spełnione są założenia poprzedniego twierdzenia. Poszukajmy zatem rozwiązania problemu: na początek rozdzielmy zmienne.

$$x' = \frac{2x}{t}$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{2}{t}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = 2 \int \frac{1}{t} dt$$

$$\ln |x| = 2 \ln |t| + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = ct^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Wróćmy teraz do warunku początkowego $x(1) = 1$. Wtedy

$$1 = x(1) = c \cdot 1^2 = c.$$

Zatem

$$x(t) = t^2.$$

1.4.2 Równanie liniowe.

Załóżmy, że $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, a funkcja $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest postaci

$$f(t,x) = a(t)x + b(t).$$

Równanie

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{5}$$

nazywamy równaniem liniowym rzędu pierwszego. Jeśli $b = 0$, to równanie

$$x' = a(t)x \tag{6}$$

nazywamy równaniem liniowym jednorodnym pierwszego rzędu.

Twierdzenie 4. *Jeśli $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, to dla dowolnej pary $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ problem Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), & t \in I \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Podamy teraz algorytm rozwiązywania równanie liniowego. Rozważy najpierw równanie jednorodne (jest to równanie o zmiennych rozdzielonych)

$$x' = a(t)x.$$

Niech $A\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną funkcji a, tzn. $A'(t) = a(t)$ dla $t \in I$. Mnożąc powyższą równość przez $e^{-A(t)}$ otrzymujemy

$$e^{-A(t)}x'(t) - a(t)e^{-A(t)}x(t) = 0, \qquad t \in I$$

co oznacza, że

$$\left(x(t)e^{-A(t)}\right)' = 0, \qquad t \in I.$$

Stąd dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$

$$x(t) = c \cdot e^{A(t)}, \qquad t \in I$$

tzn.

$$x(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $x(t_0) = x_0$, to otrzymamy:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$

Wniosek 2. *Jedynym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego*

$$\begin{cases} x' = a(t)x, & t \in I \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

jest funkcja postaci

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$

Metoda rozwiąywania równania niejednorodnego postaci (5) nosi nazwę metody uzmienniania stałej. Z równaniem
$$x' = a(t)x + b(t)$$
skojarzone jest równanie jednorodne postaci
$$x' = a(t)x,$$
które, dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$, ma rozwiązanie postaci
$$x(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$
Potraktujemy w powyższej równości stałą c jaklo funkcją zmiennej t. Wtedt dla dowolnego $t_0 \in I$ otrzymujemy
$$x(t) = c(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$
Stąd
$$x'(t) = c'(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I.$$
Wstawiając powyższe dwie równości do równania, dostajemy:
$$c'(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = a(t)c(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + b(t),$$
czyli
$$c'(t) = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$
Funkcja c jest zatem pierwotną funkcji $I \ni t \to b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \in \mathbb{R}$. Wstawiając ją do równości
$$x(t) = c(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \qquad t \in I$$
otrzymujemy rozwiązanie równania.

Przykład 6. Rozważmy rónanie
$$x' + 3x = 4.$$
Na początek rozwiążemy rónanie
$$x' + 3x = 0,$$
czyli równanie
$$x' = -3x$$
$$\frac{x'}{x} = -3$$
$$\int \frac{1}{x} = -\int 3dt$$

$$\ln|x| = -3t + c_1, \qquad c_\in\mathbb{R}$$

$$x(t) = c \cdot e{-}3t, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Uzmiennimy teraz stałą c. Mamy

$$x(t) = c(t) \cdot e{-}3t.$$

Wtedy

$$x'(t) = c'(t)e^{-3t} - 3c(t)e^{-3t}$$

Po wstawieniu powyższych do równania $x' + 3x = 4$ dostajemy:

$$c'(t)e^{-3t} - 3c(t)e^{-3t} + 3c(t) \cdot e^{-3t} = 4,$$

czyli

$$c'(t) = 4e^{3t}$$

Wtedy

$$c(t) = 4\int e^{3t}dt = \frac{4}{3}e^{3t} + c_2.$$

Po wstawienu postaci funkcji–stałej c do wzoru $x(t) = c(t) \cdot e^{-3t}$ dostajemy

$$x(t) = \left(\frac{4}{3}e^{3t} + c_2\right) \cdot e^{-3t} = \frac{4}{3} + c_2e^{-3t}.$$

1.5 Równania liniowe n–tego rzędu o stałych współczynnikach.

Niech $x\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Oznaczmy:

$$x^{(0)}(t) = x(t),$$

$$x^{(1)}(t) = x'(t),$$

$$x^{(2)}(t) = x''(t),$$

$$\vdots$$

$$x^{(n+1)}(t) = (x^{(n)})'(t).$$

Niech dalej $a_i, b\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi (dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$). Rozważmy równanie różniczkowe:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{7}$$

dla $t \in I$. Równanie (7) nazywamy równaniem niejednorodnym liniowym rzędu n. Jeżeli $b = 0$, to równanie postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \tag{8}$$

nazywamy równaniem liniowym jednorodnym rzędu n. Rónanie liniowe rzędu n rozpatrujemy z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Poszukujemy rówiązań równania (8) w postaci:

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Wtedy (wstawiając powyższą funkcję do równania (8)) otrzymujemy:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{9}$$

Jest to równanie wielomianowe rzędu n, tzn. istnieje n jego pierwiastków zespolonych. Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym.

- Jeżeli λ jest pierwiastkiem rzeczywistym, to funkcja

  $$x(t) = e^{\lambda t}$$

  jest rozwiązaniem równania (8).

- Jeżeli $\lambda = a + bi$ jest pierwiastkiem zespolonym, to również liczba $\bar{\lambda} = a - bi$ jest jego pierwiastkiem. Wtedy rozwiązaniemi zespolonym równania (8) są funkcje

  $$e^a \sin bt \qquad \text{oraz} \qquad e^a \cos bt.$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli $a_i \colon I \to \mathbb{R}$ (dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) są funkcjami ciągłymi, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x \colon I \to \mathbb{R}$ równania*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Uwaga 5. Przy założeniach poprzedniego twierdzenia mamy:

- jeżeli λ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, to funkcja

  $$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

  jest rozwiązaniem równaniach jednorodnego (8),

- jeżeli $\lambda = a + bi$ jest zespolonym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to również $\bar{\lambda} = a - bi$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Wtedy funkcje

  $$c_1 e^{\lambda t}, \qquad c_2 e^{\bar{\lambda} t}$$

  są zespolonymi rozwiązaniami równania jednorodnego (8). Natomiast funkcje

  $$c_1 e^{at} \sin{(bt)}, \qquad c_2 e^P at \cos{(bt)}$$

  są jego rzeczywistymi rozwiązaniami,

- jeżeli λ jest k–krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to istnieje k liniowo niezależnym rozwiązań równania jednorodnego (8) postaci

$$c_0 e^{\lambda t}, \quad c_1 t e^{\lambda t}, \quad c_2 t^2 e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad c_{k-1} t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Oznacza to, że jeżeli równanie charakterystyczne jest wielomianem stopnia n, to istnieje jego n pierwiastków (liczonych z krotnościami). Wtedy równanie jednorodne (8) ma n liniowo niezależnym rozwiązań.

Przykład 7. Rozważmy równanie

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Wtedy równanie charakterystyczne jest postaci:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \qquad \lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Rozwiązania równania są funkcjami postaci

$$e^{2t}, \qquad e^{3t},$$

a zatem rozwiązanie ogólne równania jest postaci

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

Przykład 8. Rozwiążemy teraz równanie

$$x'' - 4x = 0.$$

Jego równanie charakterystyczne jest postaci

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

a jego pierwiastkiem podwójnym jest

$$\lambda = 2.$$

Zatem rozwiązaniami równania są funkcje

$$e^{2t} \qquad \text{oraz} \qquad te^{2t}.$$

Natomiast funkcja

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

jest jego rozwiązaniem ogólnym.

Poszukamy teraz rozwiązań równania (7). Podobnie jak w przypadku równań rzędu pierwszego, możemy wykorzystać metodą uzmienniania stałej. Jednak w przypadku równań wyższych rzędów wygodniejsza wydaje się metoda przewidywań. Polega ona na przewidzeniu postaci pewnego rozwiązania szczególnego równania (7).

Przykład 9. Rozważmy równanie

$$x'' + x' + x = 3t$$

Prawa strona równania jest postaci $b(t) = 3t$. Będziemy przewidywali rozwiązanie tego samego typu, czyli wielomianu tego samego rzędu. W tym przypadku będziemy szukali rozwiązania

$$x_1(t) = at + b.$$

Obliczmy pochodne:

$$x_1'(t) = a$$

$$x_1''(t) = 0$$

Wtedy (po wstawieniu postaci rozwiązania do równania) otrzymujemy:

$$0 + a + (at + b) = 3t.$$

Czyli

$$at + (a + b) = 3t$$

$$\begin{cases} a = 3, \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3, \\ b = -3 \end{cases}$$

SAtąd rozwiązanie szczególne jest postaci

$$x_1(t) = 3t - 3.$$

Prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 6. *Jeżeli $a_i, b\colon I \to \mathbb{R}$ (dla $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) są funkcjami ciągłymi, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x\colon I \to \mathbb{R}$ równania*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Dodatkowo, jeżeli x_0 jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (8), a x_1 jest pewnym szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (7), to każde rozwiązanie równania niejednorodnego (7) jest funkcją postaci

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t).$$

Przykład 10. Rozwiążemy równanie

$$x'' + 2x' + 2x = 3e^{2t}.$$

na początek rozważmy równanie niejednorodne:

$$x'' + 2x' + 2x = 0.$$

Równanie charakterystyczne jest postaci:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Wtedy

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$\lambda_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i, \qquad \lambda_2 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

Zatem rozwiązanie zespolone są postaci

$$x_1(t) = e^{(-1-i)t}, \qquad x_2(t) = e^{(-1+i)t}$$

Ale

$$e^{(-1-i)t} = e^{-t} \cdot e^{-it} = e^{-t}\left(\cos(-t) + i\sin(-t)\right) = e^{-t}\left(\cos t - i\sin t\right)$$

Zatem rozwiązanie rzeczywiste są postaci:

$$x_1(t) = e^{-t}\cos t, \qquad x_2(t) = e^{-t}\sin t$$

a zatem ogólne rozwiązanie równanie jednorodnego jest postaci:

$$x_0(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t.$$

Przejdziemy teraz do znalezienia rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego:

$$x'' + 2x' + 2x = 3e^{2t}.$$

Prawa strona równania $b(t) = 3e^{2t}$ jest funkcją wykładniczą, a zatem szukamy rozwiązania postaci:

$$x(t) = ae^{2t}$$

Obliczmy pochodne:

$$x'(t) = 2ae^{2t}$$
$$x''(t) = 4ae^{2t}$$

Wtedy (wstawiając postać funkcji do równania):

$$4ae^{2t} + 2 \cdot 2ae^{2t} + 2 \cdot ae^{2t} = 3e^{2t}$$
$$10ae^{2t} = 3e^{2t}$$
$$10a = 3$$
$$a = \frac{3}{10}$$

Stąd rozwiązanie szczególne jest postaci:

$$x_s(t) = \frac{3}{10}e^{2t}$$

Oznacza to, że ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego jest funkcją postaci:

$$x(t) = x_s(t) + x_0(t) = \frac{3}{10}e^{2t} + c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t$$