CAŁKA OZNACZONA RIEMANNA W PRZESTRZENI $\mathbb{R}^n$

W pierwszym semestrze omawialiśmy całkę oznaczoną na $\mathbb{R}$. Na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ całkę definiujemy analogicznie.
Na początku wprowadzimy jej formalną definicję:

Jeśli $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ oraz

$$a_i \le b_i \quad , i\in\{1,\dots,n\}$$

to <u>prostokątem domkniętym</u> $P=[a,b]\subseteq\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$P=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ a_i\le x_i\le b_i\ ,\ i\in\{1,\dots,n\}\}$$

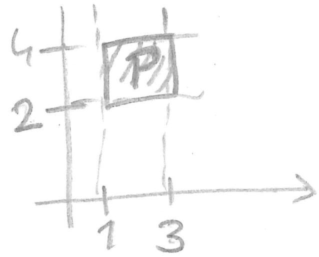
<u>Przykład</u>

- $n=2$

  $a=(1,2)$

  $b=(3,4)$

  $P=\{(x,y):\ 1\le x\le 3\ ,\ 2\le y\le 4\}$

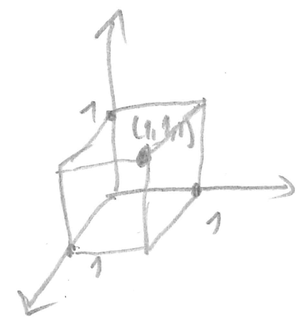


- $n=3$

  $a=(0,0,0)$

  $b=(1,1,1)$

  $P=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$



Podziałem prostokąta P nazywamy skończoną rodzinę prostokątów domkniętych $\Pi=\{P_1,\dots,P_m\}$ takich, że

$$P=\bigcup_{i=1}^{m} P_i$$

oraz

$$\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j=\emptyset \qquad \text{dla } i\neq j$$

Mówimy, że podział $\Sigma=\{K_1,\dots,K_k\}$ jest podpodziałem podziału $\Pi=\{P_1,\dots,P_m\}$ jeśli

$$\bigwedge_{i\in\{1,\dots,k\}}\ \bigvee_{j\in\{1,\dots,m\}}\ K_i\subseteq P_j$$

<u>Objętością prostokąta</u> $P = [a,b]$ nazywamy liczbę

$$|P| = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n - a_n)$$

Średnicą prostokąta P nazywamy liczbę

$$\Delta(P) = \max_{x,y\in P} \|x-y\|$$

Średnicą podziału $\Pi = \{P_1,\ldots,P_m\}$ nazywamy liczbę

$$\delta(\Pi) = \max\left(\Delta(P_1),\ldots,\Delta(P_m)\right)$$

Jeśli $\Pi = \{P_1,\ldots,P_m\}$ jest podziałem prostokąta P, to

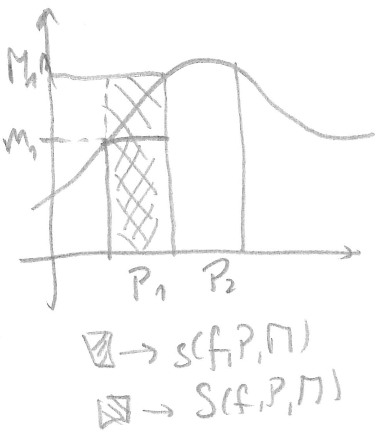
$$|P| = \sum_{i=1}^{m} |P_i|$$

Ustalmy prostokąt domknięty $P \subset \mathbb{R}^n$. Niech $f: P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $\Pi = \{P_1,\ldots,P_m\}$ podziałem prostokąta P. Niech

$$M = \sup f(P) \qquad m = \inf f(P)$$

$$M_k = \sup f(P_k) \qquad m_k = \inf f(P_k)$$

$$S(f,P,\Pi) = \sum_{k=1}^{m} M_k |P_k| \qquad s(f,P,\Pi) = \sum_{k=1}^{m} m_k |P_k|$$



Liczby $s(f,P,\Pi)$ oraz $S(f,P,\Pi)$ nazywamy <u>sumami aproksymacyjnymi</u> odpowiednio dolną i górną funkcji f na prostokącie P dla podziału Π.

Mamy oczywiście

$$m|P| \le s(f,P,\Pi) \le S(f,P,\Pi) \le M|P|$$

Uwaga

- Jeśli podział $\Sigma = \{K_1, \ldots, K_l\}$ jest podpodziałem podziału $\Pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$, to

$$s(f,P,\Pi) \leq s(f,P,\Sigma)$$

$$S(f,P,\Sigma) \leq S(f,P,\Pi)$$

- Jeśli Π_1 i Π_2 są dowolnymi podziałami prostokąta P, to

$$m|P| \leq s(f,P,\Pi_1) \leq S(f,P,\Pi_2) \leq M|P|$$

Z powyższej uwagi wynika, że istnieją liczby

$$\underline{I}(f,P) = \sup_{\Pi} s(f,P,\Pi) \quad \text{oraz} \quad \overline{I}(f,P) = \inf_{\Pi} S(f,P,\Pi)$$

oraz zachodzi nierówność

$$\underline{I}(f,P) \leq \overline{I}(f,P)$$

Liczbę $\underline{I}(f,P)$ nazywamy całką dolną, a liczbę $\overline{I}(f,P)$ całką górną funkcji f w prostokącie P. Jeśli całki górna i dolna funkcji f w prostokącie P są sobie równe, to mówimy, że funkcja f jest <u>całkowalna w prostokącie P w sensie Riemanna</u>, a wspólną wartość tych całek nazywamy <u>całką Riemanna</u> funkcji f w prostokącie P i oznaczamy

$$\int_P f \quad \text{lub} \quad \int_P f(x)\,dx \quad \text{lub} \quad \underbrace{\int \ldots \int_P}_{n\text{-całek}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

Uwaga Jeśli $f(x) = 1$, to $\int_P dx = |P|$

Twierdzenie

Jeśli $P \subseteq \mathbb{R}^n$ jest prostokątem domkniętym, a funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest całkowalna.

Własności całki

(a) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to

$$m|P| \le \int_P f \le M|P|$$

(b) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i nieujemna, to

$$\int_P f \ge 0$$

(c) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i $K \subseteq P$ jest podprzedziałem domkniętym przedziału P, to f jest całkowalna w przedziale K.

(d) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, a $\Pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ jest podziałem przedziału P, to funkcja f jest całkowalna w każdym z przedziałów P_k, $k \in \{1, \dots, m\}$ oraz

$$\int_P f = \sum_{k=1}^{m} \int_{P_k} f$$

(e) Jeśli funkcje $f, g: P \to \mathbb{R}$ są całkowalne oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to funkcja $\alpha f + \beta g$ jest całkowalna ~~oraz~~ w przedziale P oraz

$$\int_P (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_P f + \beta \int_P g$$

(f) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to funkcja f^2 jest całkowalna w przedziale P

(g) Jeśli funkcje $f, g: P \to \mathbb{R}$ są całkowalne, to funkcja $f \cdot g$ jest całkowalna w przedziale P.

(h) Jeśli funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to funkcja $|f|$ jest całkowalna w przedziale P

oraz $$\int_P |f| \ge \left| \int_P f \right|$$

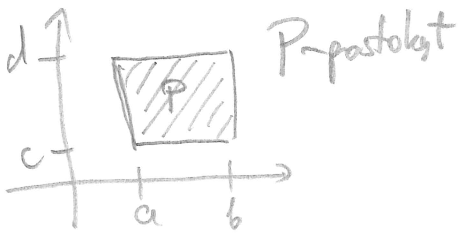
(i) Jeśli funkcje $f, g: P \to \mathbb{R}$ są całkowalne oraz $f(x) \le g(x)$, $x \in P$, to

$$\int_P f \le \int_P g$$

Całki iterowane

Załóżmy na początek, że $n=2$. (problem wyższych rzędów omówimy później)

Niech $P = \{(x,y):\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$



oraz niech $f: P \to \mathbb{R}$ jest ograniczona. Załóżmy dodatkowo, że dla dowolnego $x \in [a,b]$ istnieje całka

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Jeśli funkcja φ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, to całkę

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

nazywamy <u>całką iterowaną</u> funkcji f.

Jeśli dla dowolnego $y \in [c,d]$ istnieje całka

$$\psi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

i funkcja ψ jest całkowalna w przedziale $[c,d]$, to całkę

$$\int_c^d \psi(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

nazywamy również <u>całką iterowaną</u> funkcji f.

Poniższy lemat pokazuje pewne własności funkcji φ i ψ zdefiniowanych powyżej:

Lemat

Jeśli $P \subset \mathbb{R}^2$ jest prostokątem postaci

$$P = \{(x,y):\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\},$$

a funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcje $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz $\psi: [c,d] \to \mathbb{R}$ dane powyższymi wzorami są ciągłe.

Kolejne twierdzenie pokazuje związek pomiędzy całkami iterowanymi, a całką po prostokącie P.

Twierdzenie

Niech $P=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}\subseteq\mathbb{R}^2$ oraz $f:P\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Jeśli istnieją całki:

$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy\ , \quad \int_c^d f(x,y)\,dy\ ,\ x\in[a,b], \quad \int_a^b f(x,y)\,dx\ ,\ y\in[c,d],$$

to istnieją całki iterowane

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{oraz} \quad \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

oraz zachodzi równość:

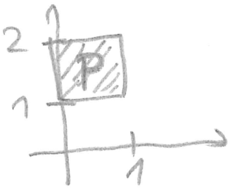
$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy \qquad (A)$$

Wniosek

Jeśli $P=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}\subseteq\mathbb{R}^2$ oraz $f:P\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieją obydwie całki iterowane oraz zachodzi równość (A)

Przykład

$$P=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}=[0,1]\times[1,2]$$



$$f:P\to\mathbb{R} \qquad f(x,y)=x+xy^2$$

$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_1^2(x+xy^2)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\left[xy+\tfrac{1}{3}xy^3\right]_1^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x+\tfrac{8}{3}x-x-\tfrac{1}{3}x\right)dx=\int_0^1\tfrac{10}{3}x\,dx=\tfrac{5}{3}x^2\Big|_0^1=\tfrac{5}{3}$$

$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy=\int_1^2\left(\int_0^1(x+xy^2)\,dx\right)dy=\int_1^2\left(\left[\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^2y^2\right]_0^1\right)dy=\int_1^2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}y^2\right)dy=$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{6}y^3\right]_1^2=1+\tfrac{8}{6}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{7}{6}=\tfrac{10}{6}=\tfrac{5}{3}$$

Sytuacja w przypadku $n=3$ jest analogiczna. Jeśli

$$P = \{(x,y,z) : x\in[a_1,b_1],\ y\in[a_2,b_2],\ z\in[a_3,b_3]\}$$

to rozpatrujemy $6 = 3!$ całek iterowanych:

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

$$\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

$$\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>Twierdzenie</u>

Jeśli $P = \{(x,y,z) : x\in[a_1,b_1],\ y\in[a_2,b_2],\ z\in[a_3,b_3]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz $f : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieją wszystkie całki iterowane ~~oraz~~ są równe całce $\int_P f\,dx\,dy\,dz$.

<u>Przykład</u>

$$P = [1,2]\times[3,4]\times[-1,2]$$

$$f(x,y,z) = x^2 + yz$$

$$\int_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\int_3^4\int_{-1}^2 (x^2+yz)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_1^2 \int_3^4 \left[x^2 z + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=-1}^{z=2} dy\, dx =$$

$$= \int_1^2 \int_3^4 \left(2x^2 + 2y + x^2 - \frac{1}{2}y\right) dy\, dx = \int_1^2 \int_3^4 \left(3x^2 + \frac{3}{2}y\right) dy\, dx =$$

$$= \int_1^2 \left[3x^2 y + \frac{3}{4} y^2 \right]_{y=3}^{y=4} dx = \int_1^2 \left(12x^2 + 12 - 9x^2 - \frac{27}{4}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{21}{4}\right) dx = \left[x^3 + \frac{21}{4} x \right]_{x=1}^{x=2} = 8 + \frac{21}{2} - 1 - \frac{21}{4} = \frac{49}{4}$$

Podamy teraz definicję całki po dowolnym zbiorze ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (do tej pory rozważaliśmy tylko całki po prostokątach domkniętych.

Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem ograniczonym. Istnieje wtedy prostokąt domknięty $P \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $D \subseteq P$. Niech $f: D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Rozważmy funkcję $f_0 : P \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in P \setminus D \end{cases}$$

Mówimy, że f jest <u>całkowalna w zbiorze D</u> jeśli istnieje całka $\int_P f_0$.

Całkę w zbiorze D z funkcji f oznaczamy symbolem $\int_D f$ i definiujemy następująco

$$\int_D f = \int_P f_0$$

Wartość całki $\int_D f$ nie zależy od wyboru prostokąta P!

Omówimy teraz sposób i metody całkowania dla szczególnych obszarów (obszarów normalnych), które pojawiają się bardzo często w zastosowaniach.

Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^2$

Mówimy, że zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest <u>obszarem normalnym względem osi OX</u>, jeśli istnieją takie funkcje $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) \le \psi(x)$, $\varphi(x) \neq \psi(x)$ dla $x \in (a,b)$, że

$$D = \{(x,y) : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ x \in [a,b]\} \qquad (N1)$$

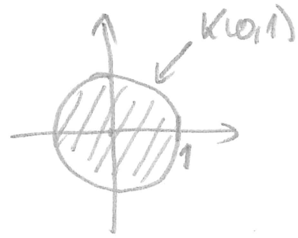
Mówimy, że zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest <u>obszarem normalnym względem osi OY</u>, jeśli istnieją takie funkcje ciągłe $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) \le \psi(y)$, $\varphi(y) \neq \psi(y)$ dla $y \in [c,d]$, że

$$D = \{(x,y) : \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ y \in [c,d]\} \qquad (N2)$$

Mówimy, że zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest <u>obszarem normalnym</u>, jeśli jest obszarem normalnym względem osi OX lub osi OY.

<u>Przykład</u>

Koło $K(0,1) = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ jest obszarem normalnym, ponieważ



$$x^2+y^2 \le 1$$
$$y^2 \le 1-x^2$$
$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

$$K(0,1) = \{(x,y) : -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]\}$$

$$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$$
$$\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$$

<u>Twierdzenie</u> (całkowanie względem obszarów normalnych)

Jeśli zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest obszarem normalnym względem osi OX, danym wzorem (N1), a funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $\iint_D f$ oraz

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

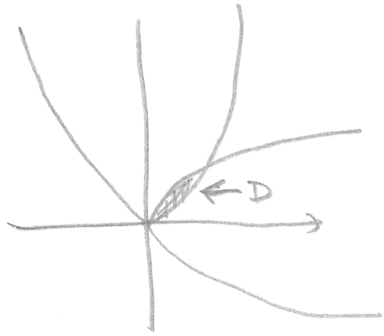
Jeśli zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest obszarem normalnym względem osi OY, danym wzorem (N2), a funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $\iint_D f$ oraz

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Przykład

D — obszar ograniczony między parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$

$y = \sqrt{x}$



wtedy $D = \{(x,y) : x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \in [0,1]\}$

$\varphi(x) = x^2$

$\psi(x) = \sqrt{x}$

Obliczymy całkę

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$$

Mamy

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - x^4 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{3}{10} x^5 + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{40 - 42 + 35}{140} = \frac{33}{140}$$

Uwaga

$$|D| = \iint_D dx\,dy \qquad \text{(przyjmujemy } f = 1\text{)}$$

↑ pole figury D

Twierdzenie (o zamianie zmiennych w całce podwójnej) → napisać wypowiedź i szybko przejść do przykładu

Załóżmy, że $G \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym, a $\Delta \subseteq G$ oraz $D \subseteq \mathbb{R}^2$ są obszarami normalnymi. Załóżmy dalej, że odwzorowanie $F: G \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)), \quad (u,v) \in G$$

spełnia następujące założenia:

(i) $F(\Delta) = D$

(ii) funkcje $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ mają ciągłe pochodne cząstkowe w każdym punkcie obszaru Δ

(iii) odwzorowanie F zawężone do zbioru $\operatorname{int} \Delta$ jest różnowartościowe

(iv) jakobian odwzorowania F, czyli funkcja

$$J(u,v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{bmatrix}$$

jest różny od zera dla $(u,v) \in \operatorname{int} \Delta$

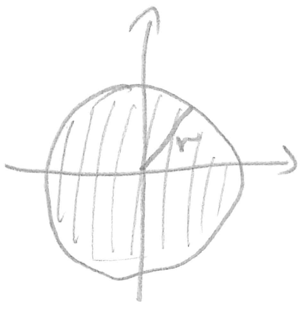
Jeśli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to zachodzi wzór

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\, |J(u,v)|\, du\,dv$$

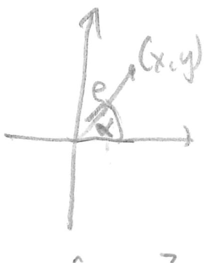
Jest to bardzo ważne twierdzenie, którego zastosowanie (dla tzw. podstawień biegunowych) zaraz pokażemy.

Podstawienie biegunowe

$$D = K(0,r) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le r^2\}$$



$$F(\varrho, \alpha) = (\varrho \cos\alpha, \varrho \sin\alpha)$$



$$\begin{cases} \varphi(\varrho,\alpha) = \varrho\cos\alpha \\ \psi(\varrho,\alpha) = \varrho \sin\alpha \end{cases} \quad \text{gdzie } \varrho \in [0,r], \ \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$J(\varrho,\alpha) = \det\begin{bmatrix} \cos t & -\varrho \sin t \\ \sin t & \varrho \cos t \end{bmatrix} = \varrho$$

$$|J(\varrho,\alpha)| = \varrho$$

wtedy
$$\iint_{K(0,r)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^r f(\varrho\cos\alpha, \varrho\sin\alpha)\,\varrho\,d\varrho\,d\alpha$$

<u>Przykład</u> (obliczymy objętość kuli jednostkowej)

Uwaga: Podobnie można obliczyć pole koła jednostkowego. Można ten przykład też policzyć!

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\} =$$
$$= \{(x,y,z) : -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2},\ x,y \in K(0,1)\}$$

$$|V| = \iint_{K(0,r)} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\right) dx\,dy = \iint_{K(0,r)} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-(\varrho\cos\alpha)^2-(\varrho\sin\alpha)^2}\,\varrho\,d\varrho\,d\alpha =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho\right)d\alpha = 2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\alpha =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\,d\alpha = 2\cdot\left[\frac{1}{3}\alpha\right]_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} = \frac{4}{3}\pi$$

Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^3$

Całkowanie w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^3$ działa analogicznie do $\mathbb{R}^2$ (dodajemy tylko jeden wymiar)

Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}^3$ nazywamy obszarem normalnym względem płaszczyzny XY, jeśli istnieją funkcje ciągłe $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest obszarem normalnym, takie, że

$$\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \qquad (x,y) \in \operatorname{int} D$$
$$\varphi(x,y) \neq \psi(x,y)$$

oraz

$$V = \{(x,y,z) : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y),\ (x,y) \in D\} \qquad (N3)$$

Analogicznie definiujemy obszary normalne względem płaszczyzn YZ i XZ.
Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}^3$ nazywamy <u>obszarem normalnym</u> jeśli jest obszarem normalnym względem choć jednej płaszczyzny układu współrzędnych.

Twierdzenie

Jeśli $V \subseteq \mathbb{R}^3$ jest obszarem normalnym postaci $(N3)$, a funkcja $f : V \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje całka $\iiint_V f$ oraz

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Uwaga

$$|V| = \iiint_V dx\,dy\,dz \qquad \text{dla } V \subseteq \mathbb{R}^3$$

objętość zbioru V

Podobnie jak dla obszarów normalnych w $\mathbb{R}^3$ w tym przypadku zachodzi twierdzenie o zamianie zmiennych. Pominiemy jego wyprowadzenie (jest analogiczne) i podamy od razu przykład jego zastosowania.

Podstawienie sferyczne

$$W = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$$

kula o środku w $(0,0,0)$ i promieniu r

$$V = \underbrace{[0,r]}_{\text{odległość od środka}} \times \underbrace{[0,\pi]}_{\text{szerokość geograficzna}} \times \underbrace{[0,2\pi]}_{\text{długość geograficzna}}$$

$$F(\varrho,\alpha,\beta) = (\varrho \sin\alpha\cos\beta,\ \varrho\sin\alpha\sin\beta,\ \varrho\cos\alpha)$$

$$J(\varrho,\alpha,\beta) = \det\begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \varrho\cos\alpha\cos\beta & -\varrho\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & -\varrho\cos\alpha\cos\beta & \varrho\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha & -\varrho\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} = \varrho^2\sin\alpha$$

Wtedy

$$\iiint_W f = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varrho\sin\alpha\cos\beta,\ \varrho\sin\alpha\sin\beta,\ \varrho\cos\alpha)\,\varrho^2\sin\alpha \, d\varrho\, d\alpha\, d\beta$$

Zastosowanie w fizyce

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$

Będziemy rozpatrywali zagadnienie związane z rozmieszczeniem masy.

$\varrho = \varrho(x,y)$ — gęstość rozkładu masy w pkt. $(x,y) \in D$

$\{ \varrho = \varrho(x,y,z), \ (x,y,z) \in V \}$

Wtedy

$$m = \iint_D \varrho(x,y)\,dx\,dy \qquad \left\{ m = \iiint_V \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \right\}$$

(a) moment statyczny

jeśli $\varrho : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$M_X = \iint_D y\,\varrho(x,y)\,dx\,dy \qquad M_Y = \iint_D x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy$$

jeśli $\varrho : V \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to momenty statyczne masy m względem płaszczyzn XY, YZ, XZ określamy następująco:

$$M_{XY} = \iiint_V z\,\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{YZ} = \iiint_V x\,\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{XZ} = \iiint_V y\,\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(b) moment bezwładności

$\varrho : D \to \mathbb{R}^2$ — ciągła

$$B_X = \iint_D y^2 \varrho(x,y)\,dx\,dy \qquad B_Y = \iint_D x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy$$