~~[illegible]~~ MATEMATYKA STOSOWANA

MECHATRONIKA

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY W PRZESTRZENIACH $\mathbb{R}^n$

Pojęcie różniczki (oraz pochodnej) pojawiło się już w pierwszym semestrze. Teraz będziemy rozważali te same pojęcia, ale dla przestrzeni wielowymiarowych $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Definicja różniczki będzie taka sama, ale tutaj przyjrzymy się jej dużo bardziej dokładnie.

Dany jest otwarty ($\to$ patrz niżej (w ramce)) zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $p_0 \in U$ oraz odwzorowanie $f: U \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$. Mówimy, że odwzorowanie f jest <u>różniczkowalne</u> w punkcie p_0, jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $d_{p_0} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - d_{p_0} f(p - p_0)}{\|p - p_0\|} = 0 \qquad (\square)$$

Odwzorowanie $d_{p_0} f$ nazywamy wówczas <u>różniczką</u> odwzorowania f w punkcie p_0.

Wyjaśnienia:

- $\|a\| = \|(a_1, \dots, a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$
- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywamy odwzorowaniem liniowym, gdy istnieje macierz A o m-wierszach i n-kolumnach taka, że

$$T(x) = Ax$$

Oznacza to, że

$$d_{p_0} f(h) = A \cdot h$$

U jest zbiorem otwartym, tzn.

$$\bigwedge_{x \in U} \bigvee_{r > 0} K(x, r) \in U$$

$$\{y : \|x - y\| < r\} \subset U$$

{ oczywiście istotne jest w jaki sposób otrzymać macierz A ? }

Gdy $m=n=1$, to $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ oraz

$$d_{p_0}f(h) = f'(p_0)\cdot h$$

(patrz 1 semestr)

Równość ($\square$) możemy zapisać równoważnie w postaci

$$f(p)-f(p_0)-d_{p_0}f(p-p_0) = r(p,p_0),$$

gdzie

$$\lim_{p\to p_0}\frac{r(p,p_0)}{\|p-p_0\|}=0$$

Lub inaczej (biorąc $h=p-p_0$)

$$f(p_0+h)-f(p_0) = d_{p_0}f(h) + r(p_0+h,p_0)$$

gdzie

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(p_0+h,p_0)}{\|h\|}=0$$

Przykład

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
  $f(x)=3x+5$

$$f(p_0+h)-f(p_0) = \left(3(p_0+h)+5\right)-(3p_0+5) = 3h$$

wtedy $d_{p_0}f(h)=3h$

$r(p_0+h,p_0)=0$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

  $f(x,y) = (2x, 3y)$

  $p_0 = (7,6)$

  $h = (h_1, h_2)$

$$f(p_0+h) - f(p_0) = f(7+h_1, 6+h_2) - f(7,6) =$$
$$= (2(7+h_1), 3(6+h_2)) - (14, 18) =$$
$$= (14+2h_1, 18+3h_2) - (14, 18) = (2h_1, 3h_2)$$

Wtedy $d_{p_0} f(h_1,h_2) = (2h_1, 3h_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $f(x,y) = 4x + 6y + 8$

  $p_0 = (2,3)$

  $h = (h_1, h_2)$

$$f(p_0+h) - f(p_0) = f(2+h_1, 3+h_2) - f(2,3) = [4(2+h_1) + 6(3+h_2) + 8]$$
$$- [4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8] = 4h_1 + 6h_2$$

Wtedy $d_{p_0} f(h_1,h_2) = 4h_1 + 6h_2 = [4, 6] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $f(x,y) = xy$

  $p_0 = (1,2)$ $\quad h = (h_1, h_2)$

$$f(p_0+h)-f(p_0)= f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) = (1+h_1)(2+h_2) - 2 =$$

$$= 2h_1 + h_2 + h_1 h_2$$

Wtedy $\quad d_{p_0} f(h_1,h_2) = 2h_1 + h_2$

$$r(p_0+h, p_0) = h_1 h_2$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2 \to 0}} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

<u>Twierdzenie</u>

Każde odwzorowanie różniczkowalne w punkcie jest ciągłe w tym punkcie.

Dowód nie jest trudny, ale pomijam

(ale dla formalności wpiszę go tu)

Niech f będzie różniczkowalne w punkcie p_0. Wtedy

$$\lim_{h\to 0} (d_{p_0} f(h)) = \lim_{h\to 0} (Ah) = 0$$

oraz

$$\lim_{h\to 0} r(p_0+h, p_0) = \lim_{h\to 0} \Big(\underbrace{\frac{r(p_0+h, p_0)}{\|h\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|h\|}_{\to 0} \Big) = 0$$

Stąd

$$\lim_{h\to 0} (f(p_0+h) - f(p_0)) = \lim_{h\to 0} \big(d_{p_0} f(h) + r(p_0+h, p_0) \big) = 0$$

czyli

$$\lim_{h\to 0} f(p_0+h) = f(p_0)$$

co dowodzi ciągłości f w punkcie p_0

Pochodne częściowe

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a p_0 ustalonym punktem zbioru U. Mówimy, że odwzorowanie $f: U \to \mathbb{R}^m$ ma w punkcie p_0 pochodną w kierunku wektora $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jeśli istnieje granica

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + at) - f(p_0)}{t}$$

Granicę tę oznaczamy symbolem $f'_a(p_0)$.

Twierdzenie

Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $p_0 \in U$, a odwzorowanie $f: U \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie p_0, to istnieje pochodna odwzorowania f w każdym kierunku oraz dla dowolnego wektora $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zachodzi równość

$$f'_a(p_0) = d_{p_0} f(a)$$

Przykład (pokazuje, że twierdzenie odwrotne jest nieprawdziwe)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcja f ma w punkcie $p_0 = (0,0)$ pochodną w każdym kierunku. Ustalmy wektor $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Wtedy

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + ta) - f(p_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta_1, ta_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(ta_1)^3 (ta_2)}{(ta_1)^6 + (ta_2)^2} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^4 a_1^3 a_2}{t^3 (t^4 a_1^6 + a_2^2)} = \lim_{t \to 0} \left(t \cdot \frac{a_1^3 a_2}{t^4 a_1^6 + a_2^2} \right) = 0$$

Stąd $f'_a(0,0) = 0$.

Załóżmy, że funkcja f nie różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Wtedy musiałaby być w punkcie $(0,0)$ ciągła. Pokażemy, że tak nie jest. Niech $y = \alpha x^3$ dla pewnego $\alpha \neq 0$. Wtedy

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} (x, \alpha x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \alpha x^3}{x^6 + (\alpha x^3)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^6}{x^6 + \alpha^2 x^6} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Ale gdyby f była ciągła, to $\lim_{x\to 0} f(x, \alpha x^3) = f(0,0) = 0$. Otrzymujemy sprzeczność, zatem f nie jest ciągła, czyli nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Przykład ten pokazuje również, że funkcja może mieć pochodną kierunkową (nawet we wszystkich kierunkach) w pewnym punkcie, ale nie być w tym punkcie ciągła.

Niech $(e_1, \dots, e_n)$ będą wektorami bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$, tzn.

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ta pozycja}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$
$\vdots$

oraz $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$, gdzie U jest zbiorem otwartym, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f: U \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją o składowych $f_1, \dots, f_m$, tzn.

$$f = (f_1, \dots, f_m), \quad f_k: U \to \mathbb{R}, \ k \in \{1, \dots, m\}$$

Wtedy (dla $k \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_k(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

Jeśli powyższa granica istnieje, to nazywamy ją <u>pochodną cząstkową</u> funkcji f_k w kierunku wektora e_i (względem zmiennej x_i)

Oczywiście pochodna cząstkowa jest też pochodną kierunkową!

W szczególności, gdy $m=1$, to

$$f'_{e_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad i\in\{1,\dots,n\}$$

<u>Przykład</u>

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^2yz + 2z^2$$

Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y,z) - f(x,y,z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left((x+t)^2yz + 2z^2\right) - \left(x^2yz + 2z^2\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2xyzt + t^2yz}{t} = \lim_{t\to 0} (2xyz + tyz) = 2xyz$$

Popatrzmy na przykład inaczej: Weźmy funkcję $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(x) = f(x,y,z) = x^2yz + 2z^2$$

Policzmy jej pochodną (wtedy y i z traktujemy jako parametry - stałe)

$$g'(x) = 2xyz + 0 = 2xyz$$

Otrzymaliśmy ten sam wynik, tzn.

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z).$$

Podobnie będzie dla zmiennych y i z.

Twierdzenie

Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i załóżmy, że odwzorowanie $f: U \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Jeśli $f = (f_1, \dots, f_m)$, to dla dowolnego $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ zachodzi wzór:

$$(\Delta) \qquad d_p f(h) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}}_{f'(p)} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Dowód pomijamy

Jeśli $m = 1$, to powyższa macierz jest wektorem. Wektor ten nazywamy **gradientem** funkcji f w punkcie p i oznaczamy

$$\nabla f(p) = \operatorname{grad} f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

Jeśli $m = n$ (tzn. macierz jest kwadratowa), to wyznacznik macierzy nazywamy **jakobianem** odwzorowania f w punkcie p.

$$J(p) = \det f'(p)$$

Twierdzenie

Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a odwzorowanie $f: U \to \mathbb{R}^m$ ma w punkcie $p_0 \in U$ ciągłe pochodne cząstkowe, to f ma w punkcie p_0 różniczkę i zachodzi wzór (Δ).

Przykład (rozpatrzmy funkcje z wcześniejszego przykładu, żeby pokazać, że wychodzi to samo)

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

  $f(x,y) = (2x, 3y)$

  $f_1(x,y) = 2x$

  $f_2(x,y) = 3y$

  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$

  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3$

  Zatem:

  $$d_p f(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1 + 3h_2$$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $f(x,y) = xy$

  $\frac{\partial f}{\partial x} = y$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

  Zatem

  $$d_p f(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = yh_1 + xh_2$$

  dla $p = (1,2)$ mamy

  $$d_{(1,2)} f(h_1, h_2) = 2h_1 + h_2$$

Formalne prawa różniczkowania (kilka twierdzeń dotyczących własności różniczki)

↳ Jak brakuje czasu to pominąć!

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $p_0 \in U$ oraz odwzorowania $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ są różniczkowalne w punkcie p_0. Wówczas, dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, odwzorowanie

$$\alpha f + \beta g : U \to \mathbb{R}^m$$

jest różniczkowalne w punkcie p_0 oraz

$$d_{p_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_p f + \beta d_p g$$

Twierdzenie 2

Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ są zbiorami otwartymi i niepustymi, $g : U \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie $p_0 \in U$ i $g(U) \subseteq V$, a $f : V \to \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie $g(p_0)$. Wówczas odwzorowanie $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalne w punkcie p_0 oraz

$$d_{p_0}(f \circ g) = \left(d_{g(p_0)} f\right) \circ d_p g$$

Dowody powyższych twierdzeń pomijamy, bo nie są potrzebne (nie są trudne, ale można je pominąć)

Przykład (błąd bezwzględny i błąd względny pomiaru)

Rozpatrzmy pewne wielkości fizyczne $x_1, \dots, x_n$. Ich pomiary obarczone są błędami odpowiednio $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.

Jeśli f jest funkcją powyższych wielkości fizycznych, to jej wartość w punkcie $(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n)$ obarczona jest również błędem – Δf.

Wtedy $$|\Delta f| = |f(\mathring{x}_1 + \Delta x_1, \dots, \mathring{x}_n + \Delta x_n) - f(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n)|$$

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(\mathring{x}_1, \dots, \mathring{x}_n) = p_0$, to możemy przyjąć

$$|\Delta f| \approx |d_{p_0} f| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)\Delta x_n \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \right| \cdot |\Delta x_i|$$

Gdyby $\delta_i \geq 0$ była maksymalnym błędem bezwzględnym pomiaru wielkości x_i, to

$$|\Delta x_i| \leq \delta_i \quad , i \in \{1, \dots, n\}$$

Wtedy

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \right| \delta_i$$

nazywamy maksymalnym błędem bezwzględnym pomiaru $f(p_0)$, a liczbę

$$\frac{\delta f}{|f(p_0)|}$$

nazywamy błędem względnym pomiaru $f(p_0)$.

Pewne operatory fizyczne (i nie tylko fizyczne) WAŻNE!

(a) Dywergencja (rozbieżność, źródłowość)

$$f : U \to \mathbb{R}^3 \qquad U \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Można zdefiniować dywergencję ogólniej:

$$U \subset \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n, \quad f = (f_1, \dots, f_n)$$

$$div f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Inaczej
$\boxed{div f = \nabla \cdot f}$

(b) Rotacja (wirowość)

$$f: U \to \mathbb{R}^3, \quad U \subseteq \mathbb{R}^3, \quad f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\operatorname{rot} f = \operatorname{curl} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}$$

$$i = (1, 0, 0)$$
$$j = (0, 1, 0)$$
$$k = (0, 0, 1)$$

Inaczej

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f$$

Przykład

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (2x + y, 3x + yz, 5z + 2x + 7)$$

$$f_1(x, y, z) = 2x + y$$
$$f_2(x, y, z) = 3x + yz$$
$$f_3(x, y, z) = 2x + 5z + 7$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = y \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = 5$$

Wtedy
$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2 + z + 5 = z+7$$

Np.
$$\operatorname{div} f(3,5,7) = 7+7 = 14$$

Podobnie
$$\operatorname{rot} f = (0 - y, 0 - 2, 3 - 1) = (-y, -2, 2)$$

Np.
$$\operatorname{rot} f(3,5,7) = (-5, -2, 2)$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Przykład

$$f(x,y) = 8x^6 y + 15x^5 + 2y^8$$

Wtedy
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 48x^5 y + 75x^4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^6 + 16y^7$$

Ale $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami zmiennych x i y. Możemy dla nich znów policzyć pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(48x^5 y + 75x^4\right) = 240x^4 y + 300x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(48x^5 y + 75x^4\right) = 48x^5$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(8x^6 + 16y^7\right) = 48x^5$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8x^6 + 16y^7\right) = 112y^6$$

Powyższe pochodne są to pochodne drugiego rzędu. Z nich możemy oczywiście liczyć kolejne pochodne (jeżeli się będzie dało), itd.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Pochodne cząstkowe względem różnych zmiennych nazywamy pochodnymi mieszanymi. Można (analizując przykład) zauważyć, że pochodne mieszane drugiego rzędu mają własność, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Nie jest tak zawsze, ale poniższe twierdzenie mówi kiedy ta własność zachodzi.

Twierdzenie

Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i niepustym, a funkcja $f: U \to \mathbb{R}$ ma w zbiorze U pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i,j \in \{1,\dots,n\},\ i \neq j)$ oraz są one ciągłe w punkcie $p_0 \in U$, to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_0)$$

Dowód jest trudniejszy, więc go pomijamy.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ niepusty zbiór otwarty, $f: U \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że f ma w punkcie $p_0 \in U$ maksimum (minimum) lokalne, jeśli istnieje otoczenie $U_{p_0} \subseteq U$ punktu p_0 takie, że dla $p \in U_{p_0}$ mamy ← przypomnienie

$$f(p) \le f(p_0) \qquad \left(f(p) \ge f(p_0) \right)$$

Podamy teraz warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (jest on analogiczny do odpowiedniego twierdzenia dla funkcji jednej zmiennej).

<u>Twierdzenie</u> (warunek konieczny istnienia ekstremum)
Jeżeli $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym, a $f: U \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $p_0 \in U$ ekstremum lokalne i f jest różniczkowalna w punkcie p_0, to dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ mamy

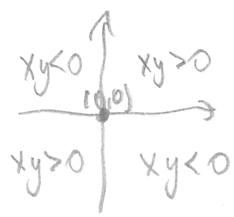
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = 0.$$

Jest to tylko warunek konieczny – nie wystarczający. Wystarczy wziąć funkcję

$$f(x,y) = xy$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Dla punktu $(0,0)$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, jednak punkt $(0,0)$ nie jest ekstremum lokalnym, bo w I i III ćwiartce układu współrzędnych $f(x,y) > 0$, a w II i IV ćwiartce mamy, że $f(x,y) < 0$.



Podamy teraz twierdzenie, które podaje warunek wystarczający istnienia ekstremum (będzie on analogiczny do twierdzenia dla funkcji jednej zmiennej).

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum) ← W przypadku braku czasu pominąć!

Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym, $p_0 \in U$ oraz

(a) funkcja $f: U \to \mathbb{R}$ ma w pewnym otoczeniu punktu p_0 ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu

(b) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = 0$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$

Jeśli dla dowolnych $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j > 0,$$

to f ma w punkcie p_0 minimum lokalne.

Jeśli dla dowolnych $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j < 0,$$

to f ma w punkcie p_0 maksimum lokalne.

Jeśli istnieją wektory $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ i $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ takie, że $p_0 + h, p_0 + k \in U$ oraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j > 0 \quad i \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, k_i k_j < 0$$

to f w punkcie p_0 nie ma ekstremum lokalnego.

Twierdzenie to jest bardzo niewygodne w użyciu i w praktyce, bo sprawdzenie znaku powyższych sum jest bardzo trudne. Podamy teraz inny warunek wystarczający, który daje możliwość badania czy funkcja ma w punkcie ekstremum lokalne (i podaje które ekstremum w tym punkcie jest przyjęte)

Niech

$$W(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{bmatrix}$$

oraz

$$\Delta_i(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p_0) \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$\Delta_1(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0)$$

$$\Delta_2(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n(p_0) = W(p_0)$$

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum) $\longrightarrow$ łatwiejszy

Załóżmy, że spełnione są założenia (a) i (b) w poprzednim twierdzeniu. Jeśli dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ mamy

$$\Delta_i(p_0) > 0,$$

to f ma w punkcie p_0 minimum lokalne.

Jeśli dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ mamy

$$(-1)^i \Delta_i(p_0) > 0,$$

to w punkcie p_0 funkcja f ma maksimum lokalne.

Dla $n=2$ powyższe twierdzenie przyjmuje szczególną postać (podane jest, bo często pojawia się w zadaniach):

Twierdzenie

Załóżmy, że spełnione są założenia (a) i (b) z poprzedniego twierdzenia. Niech

$$W(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{bmatrix}$$

Gdy $W(p_0)>0$, to f ma w punkcie p_0 ekstremum lokalne:

(i) maksimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)<0$

(ii) minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)>0$

Jeśli $W(p_0)<0$, to f nie ma w punkcie p_0 ekstremum lokalnego.

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie ma przypadku, gdy $W(p_0)=0$. To twierdzenie nie rozstrzyga w tym przypadku.

Podany teraz zostanie przykład znajdowania ekstremów lokalnych:

Przykład

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6y - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2y \longrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^2 = 2x \qquad x^4 = 8x$$

$$\tfrac{1}{4}x^4 = 2x \qquad x^3 = 8 \lor x = 0$$

$$x = 2 \lor x = 0$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=2 \Rightarrow y=\tfrac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$$

Rozpatrzymy dwa punkty $(0,0)$ i $(2,2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

Zatem

$$W(x,y) = \det\begin{bmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix} = 36xy - 36$$

Wtedy $W(0,0) = -36 < 0 \to$ nie ma ekstremum

$W(2,2) = 4\cdot 36 - 36 = 108 > 0 \to$ w punkcie $(2,2)$ jest ekstremum

ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = -6\cdot 2 = -12 < 0 \to$ maksimum

Ekstrema warunkowe

Rozpatrzmy przykład:

Znaleźć ekstrema funkcji $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x,y) = x^2 + 2x^2y^2 + 1$$

na okręgu

$$E = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$$

Możemy zdefiniować funkcję $G(x,y) = x^2+y^2-1$.

Wtedy warunek możemy zapisać w postaci
$$E=\{(x,y):\ G(x,y)=0\}$$

Można zauważyć, że zbiór E jest ograniczony i domknięty (na podstawie ciągłości funkcji G). Zatem E jest zbiorem zwartym. Rozpatrując funkcję f obciętą do zbioru E, to z ciągłości tej funkcji i zwartości zbioru E wynika istnienie obu ekstremów absolutnych f w zbiorze E.

Wyznaczając y^2 z równania okręgu:
$$y^2=1-x^2$$
i wstawiając do wzoru funkcji f otrzymujemy
$$h(x)=x^2+2x^2(1-x^2)+1=-2x^4+2x^2+1$$

Otrzymaliśmy funkcję wielomianową, której ekstrema potrafimy bez problemu znaleźć.

Jednak zwykle problem wyznaczenia ekstremów warunkowych jest dużo trudniejszy.

Załóżmy, że dany jest niepusty zbiór $U\subseteq\mathbb{R}^n$ i odwzorowanie $G: U\to\mathbb{R}^m$, gdzie $m<n$. Niech $p_0\in U$ będzie punktem zbioru
$$E=\{p\in U:\ G(p)=0\}.$$

Powiemy, że funkcja $f: U\to\mathbb{R}$ ma w punkcie $p_0\in E$ <u>ekstremum lokalne warunkowe</u> przy warunku E, jeśli funkcja f zawężona do zbioru E ma lokalne ekstremum w punkcie p_0.

Poniższe twierdzenie zawiera metodę znajdowania ekstremów warunkowych. Nosi ona nazwę <u>czynnika nieoznaczonego Lagrange'a</u>.

Twierdzenie

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem otwartym, $f: U \to \mathbb{R}$ funkcją o ciągłych pochodnych cząstkowych w zbiorze U, natomiast $G: U \to \mathbb{R}^m$ $(m<n)$ odwzorowaniem, którego składowe mają ciągłe pochodne cząstkowe w zbiorze U. Niech ponadto

$$E = \{p \in U : G(p) = 0\}$$

i załóżmy, że dla dowolnego $p \in E$ rząd macierzy $G'(p)$ jest równy m, tzn. jeśli $G = (G_1, \dots, G_m)$, to

$$r\, G'(p) = r \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} = m$$

Jeśli funkcja f ma w punkcie $p_0 \in E$ lokalne ekstremum warunkowe, to istnieją takie stałe rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, że

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(p_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial x_i}(p_0), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Można na powyższe twierdzenie popatrzeć też inaczej:

Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym, a funkcja $f: U \to \mathbb{R}$ ma lokalne ekstremum warunkowe w punkcie $p_0 \in U$, przy warunku

$$G(p_0) = (G_1(p_0), \dots, G_m(p_0)) = 0,$$

to istnieją takie stałe rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, że funkcja $\phi: U \to \mathbb{R}$ postaci

$$\phi = f - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \dots - \lambda_m G_m \qquad (*)$$

spełnia równanie $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p_0) = 0$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$

Oznacza to, że chcąc wyznaczyć punkty p_0, w których mogą być przyjęte ekstrema warunkowe funkcji f należy rozwiązać układ równań

$$(**)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}(p_0) = 0 \\ G(p_0) = 0 \end{cases}$$

Jest to układ o $(m+n)$ równaniach i o $(m+n)$ niewiadomych.
Metoda poszukiwań ekstremów warunkowych w powyższy sposób nosi nazwę <u>metody współczynników nieoznaczonych Lagrange'a</u>

Podany powyżej warunek jest tylko warunkiem koniecznym. Następne twierdzenie opisuje jeden z możliwych warunków wystarczających.

<u>Twierdzenie</u> (warunek wystarczający istnienia ekstremów warunkowych)
Załóżmy, że spełnione są założenia poprzedniego twierdzenia, a ponadto f i G są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi w sposób ciągły. Jeśli $p_0 \in E$ oraz $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ są takie, że spełniony jest układ $(**)$, gdzie funkcja ϕ dana jest wzorem $(*)$ oraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j > 0 \qquad \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j < 0 \right)$$

dla wszystkich wektorów $(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$ należących do przestrzeni

$$X = \{ (h_1, \dots, h_n) : d_{p_0} G(h_1, \dots, h_n) = 0 \},$$

to f ma w p_0 minimum warunkowe (maksimum warunkowe).

Jeśli istnieją wektory $(h_1, \dots, h_n), (k_1, \dots, k_n) \in X \setminus \{0\}$ takie, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, h_i h_j > 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)\, k_i k_j < 0$$

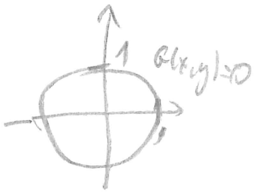
to f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie p_0.

Przykład

Rozpatrzmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

przy warunku $x^2+y^2=1$



Rozpatrzmy funkcję $G(x,y) = x^2+y^2-1$

Wtedy $\Phi = x^2+2xy+y^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$

Mamy
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x+2y-2\lambda x$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x+2y-2\lambda y$$

Musimy rozwiązać układ

$$\begin{cases} 2x+2y-2\lambda x = 0 \iff x+y = \lambda x \\ 2x+2y-2\lambda y = 0 \iff x+y = \lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda x = \lambda y$$

$$\lambda(x-y)=0$$

$$\lambda = 0 \vee x=y$$

Gdy $\lambda=0$, to

$$2x+2y=0 \iff x=-y$$
$$x^2+y^2=1$$
$$2x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$
$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda=0 \end{cases}$$

Gdy $x=y$, to

$$x^2+y^2=1$$
$$2x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$2x+2y-2\lambda x=0$$
$$4x-2\lambda x=0$$
$$2\lambda x=4x$$
$$\lambda=2$$

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy cztery punkty, w których f może przyjąć ekstremum warunkowe.

Mag:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2-2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2-2\lambda$$

Dle $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$ oez $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$ meg $\det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0$