

1 Elementy kombinatoryki i teorii prawdopodobieństwa

1.1 Elementy kombinatoryki

W rozwiązywaniu pewnych problemów związanych z obliczaniem prawdopodobieństwa o skończonej liczbie zdarzeń elementarnych bardzo często pomocne są pojęcia kombinatoryczne.

1.1.1 Reguła mnożenia

Jeśli pewną czynność wykonuje się w k etapach, przy czym pierwszy etap można wykonać na n_1 sposobów, drugi etap można wykonać na n_2 sposoby, ..., i wreszcie k -ty etap można wykonać na n_k sposobów, to liczba N określająca liczbę sposobów wykonania zadanej czynności wyraża się wzorem:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

1.1.2 Permutacje bez powtórzeń

Niech A oznacza dowolny zbiór skończony o n różnych elementach, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Permutacją bez powtórzeń n elementowego zbioru A nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg, w którym każdy element zbioru A występuje dokładnie raz. Jest to więc uporządkowanie elementów zbioru A według jakiegoś kryterium.

Przykład 1. Permutacjami zbioru $\{1, 2, 3\}$ są ciągi:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Stosując indukcję matematyczną można wykazać, że liczba P_n wszystkich permutacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego wynosi

$$P_n = n!$$

Przykład 2. Znajdź na ile sposobów można 6 osób ustawić w szereg. Każde ustawienie w szereg jest permutacją zbioru osób, który składa się z 6 elementów, zatem liczba możliwości wynosi

$$P_6 = 6! = 720.$$

Inne przykłady: znajdź liczbę możliwości ustawienia 5 gości przy podłużnym stole. Rozpatrz podobną sytuację, ale ze stołem w kształcie koła.

1.1.3 Permutacje z powtórzeniami

Niech A będzie zbiorem k różnych elementów, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Permutacją n -elementową z powtórzeniami, gdzie element a_1 powtarza się n_1 razy, ..., element a_k powtarza się n_k razy, $n = n_1 + \dots + n_k$, nazywamy każdy n elementowy ciąg, w którym każdy poszczególny element zbioru A powtarza się wskazaną liczbę razy.

Liczba $P_n^{n_1, \dots, n_k}$ wszystkich takich n elementowych permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem

$$P_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

1.1.4 Wariacje bez powtórzeń

Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k -wyrazowy ciąg k różnych elementów zbioru A , gdzie $k \leq n$, nazywamy k -wyrazową permutacją bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

Liczba V_n^k wszystkich k -wyrazowych permutacji zbioru n -elementowego można obliczyć ze wzoru

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)), \quad k \leq n.$$

Uwaga 1. Gdy $n = k$, to $V_n^n = P_n$.

Przykład 3. Znaleźć liczbę możliwych wyborów trójki klasowej (każda osoba pełni inną funkcję) w klasie składającej się z 30 osób. Każda taka trójka będzie 3-elementową permutacją bez powtórzeń (jedna osoba nie może pełnić dwóch funkcji) zbioru 30-elementowego, zatem:

$$V_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

1.1.5 Wariacje z powtórzeniami

Niech A będzie zbiorem n -elementowym. Każdy k -wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów zbioru A nazywamy k -wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego A .

Liczba W_n^k oznaczająca liczbę k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego możemy obliczyć ze wzoru:

$$W_n^k = n^k$$

Przykład 4. Numer telefonu składa się z dziewięciu cyfr. Zakładając, że każda cyfra może znaleźć się na każdym miejscu (co nie jest prawdą w rzeczywistości) znajdziemy liczbę możliwych do uzyskania w ten sposób numerów telefonów. Każdy numer jest dziewięcioelementową wariacją zbioru wszystkich cyfr (który składa się z dziesięciu cyfr), zatem

$$W_{10}^9 = 10^9.$$

1.1.6 Kombinacje bez powtórzeń

Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k -elementowy ($k \leq n$) podzbiór zbioru A nazywamy k -elementową kombinacją zbioru n -elementowego (albo kombinacją z n elementów po k elementów).

Przykład 5. Niech $A = \{a, b, c, d\}$. Znajdźmy wszystkie dwuelementowe kombinacje bez powtórzeń zbioru A :

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{a, d\}, \quad \{b, c\}, \quad \{b, d\}, \quad \{c, d\}.$$

Uwaga 2. Podstawowa różnica między wariacjami i kombinacjami związana jest z faktem, że wariacjami są ciągi, a kombinacjami zbiory.

Liczba C_n^k wszystkich k -elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego wyraża się wzorem

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład 6. Znajdziemy liczbę trzyosobowych reprezentacji na konkurs klasy składającej się z 30 osób. Każda reprezentacja jest trzelementową kombinacją bez powtórzeń (każdy uczeń może wziąć udział w reprezentacji tylko raz oraz każda osoba w reprezentacji jest tak samo ważna – pełni taką samą rolę). Zatem takich trójek jest

$$C_{30}^3 = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3} = 4060.$$

Przykład 7. Obliczymy liczbę możliwych kombinacji sześciu cyfr ze zbioru 49 elementowego (tzn. znajdziemy liczbę możliwych układów liczb w Lotto). Każdy taki układ liczb jest sześćelementową kombinacją bez powtórzeń zbioru 49-elementowego, zatem

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = 13\,983\,816.$$

Uwaga 3.

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_n$$

1.2 Pojęcie prawdopodobieństwa

Podczas analizowania doświadczeń losowych oraz obliczania prawdopodobieństwa będziemy spotykali się m.in. z następującymi pojęciami:

- doświadczenie losowe – realizacja (rzeczywista lub nie) określonego zespołu warunków, wraz z górnym określonym zbiorem wyników,
- zdarzenie elementarne ω – poszczególne wyniki doświadczenia losowego,
- przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Definicja 1. Niech $\Omega \neq \emptyset$ będzie zbiorem, a \mathcal{A} będzie rodziną podzbiorów zbioru Ω (tzn. $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$). Rodzinę \mathcal{A} nazywamy σ -ciałem podzbiorów zbioru Ω jeżeli

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$,
2. jeżeli $A \in \mathcal{A}$, to również $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. jeżeli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Uwaga 4. Każdy element σ -ciała \mathcal{A} nazywamy zdarzeniem elementarnym, przy czym:

- \emptyset – nazywamy zdarzeniem niemożliwym,
- Ω – nazywamy zdarzeniem pewnym,
- jeśli A jest zdarzeniem, to zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do A .

Definicja 2. Niech Ω będzie zbiorem niepustym (przestrzenią zdarzeń elementarnych), a $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ σ -ciałem podzbiorów zbioru Ω . Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ taką, że

1. $P(\Omega) = 1$,

2. jeśli A_1, A_2, \dots są parami rozłącznymi zdarzeniami (tzn. elementami \mathcal{A})

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset,$$

to

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Jeżeli Ω jest niepustym zbiorem zdarzeń, \mathcal{A} – σ -ciałem podzbiorów zbioru Ω , a P prawdopodobieństwem określonym na \mathcal{A} , to trójkę (Ω, \mathcal{A}, P) będziemy nazywali przestrzenią probabilistyczną.

Twierdzenie 1 (Własności prawdopodobieństwa). *Niech (Ω, \mathcal{A}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Wtedy:*

1. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi zero

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B , tzn. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B).$$

3. Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia nie przekracza liczby 1:

$$P(A) \leq 1, \quad A \in \mathcal{A}.$$

4. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B , tzn. $A \subseteq B$, to

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

5. Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n są parami rozłączne, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

6. Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych jest równa 1:

$$P(A) + P(A') = 1.$$

7. Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$ zachodzi wzór

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

8. Jeżeli Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnymi przy tym określone są prawdopodobieństwa p_i zdarzeń jednoelementowych $\{\omega_i\}$, czyli

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0,$$

$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_n = 1, & \text{gdy } \Omega \text{ jest zbiorem skończonym,} \\ p_1 + p_2 + \dots = 1, & \text{gdy } \Omega \text{ jest zbiorem nieskończonym,} \end{cases}$$

to prawdopodobieństwo zdarzenia A , któremu sprzyjają zdarzenia elementarne $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}$ (czyli $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$) wynosi

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}.$$

9. (Klasyczna definicja prawdopodobieństwa) Jeżeli przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych,

$$A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

oraz zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, tzn.

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n},$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych wynosi:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Podam teraz definicję prawdopodobieństwa warunkowego. Gdy jeżeli A, B są dowolnymi zdarzeniami, to prawdopodobieństwo zdarzenia A obliczone pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem B i oznaczamy symbolem

$$P(A|B).$$

Definicja 3. Niech (Ω, \mathcal{A}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś B ustalonym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia $A \in \mathcal{A}$ pod warunkiem B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definicja 4. Mówimy, że zdarzenia $A, B \in \mathcal{A}$ są niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Uwaga 5. Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to wtedy (jeżeli $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$)

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Twierdzenie 2 (Prawdopodobieństwo zupełne). *Jeśli B jest dowolnym zdarzeniem oraz zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają następujące warunki*

1. *wykluczają się parami*

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{gdy } i \neq j,$$

2. *ich suma jest zdarzeniem pewnym*

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega,$$

3. *mają dodatnie prawdopodobieństwa*

$$P(A_i) > 0, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

to prawdopodobieństwa zdarzenia B wyraża się wzorem

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n).$$

Prawdopodobieństwo określone w powyższym twierdzenie nazywamy prawdopodobieństwem zupełnym lub całkowitym.

Twierdzenie 3 (Wzór Bayesa). *Jeśli B jest dowolnym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie, a zdarzenia A_1, \dots, A_n spełniają założenia powyższego twierdzenia (twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym), to prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_k|B)$ zdarzenia A_k przy warunku B wyraża się wzorem*

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n p(A_i)P(B|A_i)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

1.3 Zmienna losowa, rozkład prawdopodobieństwa

1.3.1 Zmienna losowa i jej dystrybuanta

Niech (Ω, \mathcal{A}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. *Zmienną losową* nazywamy dowolną funkcję $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że dla dowolnego ustalonego $x \in \mathbb{R}$, zbiór zdarzeń elementarnych ω , dla których spełniona jest nierówność $X(\omega) < x$, jest zdarzeniem, tzn.:

$$\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega : X(\omega) < x \} \in \mathcal{A}.$$

Zdarzeniami losowymi są również zbiory zdarzeń elementarnych postaci

$$\{ \omega : X(\omega) \in A \},$$

gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolnym podzbiorem borelowskim na prostej (np. A jest zbiorem postaci: $[a, b]$, (a, b) , $\{x_0\}$, itp.).

Prawdopodobieństwo $P(X \in A)$ przyjęcia przez zmienną losową X wartości ze zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ określamy równością:

$$P(X \in A) = P(\{ \omega : X(\omega) \in A \}).$$

Np., gdy $A = (a, b]$, to

$$P(a < X \leq b) = P(\{ \omega : a < X(\omega) \leq b \}).$$

Z definicji zmiennej losowej wynika, że zbiór

$$\{ \omega : X(\omega) < x \}$$

jest zdarzeniem dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$. Można zatem rozpatrywać prawdopodobieństwa $P(X < x)$. Funkcję $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X < x)$$

nazywamy *dystrybuantą zmiennej losowej X* . Jeżeli nie ma wątpliwości z jaką zmienną losową mamy do czynienia, to piszemy F , zamiast F_X .

Uwaga 6 (Własności dystrybuanty). Dystrybuanta F dowolnej zmiennej losowej ma następujące własności:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
2. F jest funkcją niemalejącą,

3. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

4. F jest funkcją lewostronnie ciągłą, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0),$$

5. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości z przedziału $[a, b)$ jest równe przyrostowi wartości dystrybuanty F między punktami a i b :

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a),$$

6. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X ustalonej wartości x_0 wyraża się wzorem

$$P(\{x_0\}) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0),$$

Uwaga 7. Jeżeli $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mającą własności (2), (3) i (4), to jest ona dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Wyróżniamy dwa typy zmiennych losowych

- zmienne losowe typu skokowego (dyskretnego),
- zmienne losowe typu ciągłego.

1.3.2 Zmienna losowa typu skokowego

Mówimy, że zmienna losowa jest typu dyskretnego (skokowego) jeżeli istnieje skończony albo przeliczalny zbiór

$$W_x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

jej wartości taki, że

$$P(X = x_i) = p_i > 0 \tag{1}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

gdzie górna granica sumowania wynosi n albo ∞ , jeżeli zbiór W_x jest odpowiednio skończony (ma n elementów) albo przeliczalny. Warunek (1) nazywamy warunkiem unormowania.

Funkcję p określoną na zbiorze W_x równością

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \quad x_i \in W_x,$$

spełniającą warunek unormowania (1) nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa* zmiennej losowej X .

Równoważnie rozkład prawdopodobieństwa możemy zdefiniować tabelką:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}$$

Gdy dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , to prawdopodobieństwo przyjęcia przez nią wartości ze zbioru A określone jest równością

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

W szczególności, dla dowolnego przedziału (a, b) mamy

$$P(a < X < b) = \sum_{a < x_i < b} p_i$$

oraz

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

1.3.3 Zmienne losowa typu ciągłego

Zmienna losowa X przyjmująca wszystkie wartości z pewnego przedziału (lub przedziałów), dla której istnieje taka nieujemna funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dystrybuantę F zmiennej losowej X można przedstawić w postaci

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

nazywamy zmienną losową typu ciągłego, a funkcję f jej gęstością.

- Jeżeli gęstość zmiennej losowej X jest różna od zera tylko w przedziale (a, b) , to rozkład nazywamy skoncentrowanym na przedziale (a, b) .
- Dystrybuanta zmiennej losowej typu ciągłego jest funkcją ciągłą.

Uwaga 8 (Własności zmiennej losowej typu ciągłego).

1. Jeżeli x jest punktem ciągłości gęstości f , to

$$F'(x) = f(x)$$

- 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

3. $P(X = c) = 0$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$.

4. $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

- 5.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

1.3.4 Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej

W celu syntetycznego scharakteryzowania zmiennej losowej, przyporządkowuje się jej pewne liczby charakteryzujące ją pod względem np. wartości najbardziej prawdopodobnej, rozrzutu jej wartości, kształtu histogramu lub wykresu jej gęstości. Liczby te nazywamy charakterystykami liczbowymi zmiennej losowej (lub jej rozkładu prawdopodobieństwa). Najważniejsze z nich to wartość przeciętna, wariancja oraz odchylenie standardowe.

Jeżeli X jest zmienną losową, to *wartością oczekiwaną (wartością przeciętną)* jest:

- jeżeli X jest zmienną losową typu dyskretnego

$$EX = \sum_{x_i \in W_x} x_i p_i,$$

- jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

Powyższa definicja jest poprawnie określona, jeżeli szereg i całka po prawej stronie równości są zbieżne.

Twierdzenie 4 (Własności wartości oczekiwanej). *Niech X i Y będą zmiennymi losowymi oraz a, b, c będą stałymi. Wtedy:*

1. $E(c) = c$
2. $E(aX) = aEX$
3. $E(X + b) = EX + b$
4. $E(X - EX) = 0$
5. $E(X + Y) = EX + EY$
6. *Jeżeli X i Y są niezależne, to $E(XY) = EX \cdot EY$*

Wariancja zmiennej losowej X jest to wartość przeciętna kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości przeciętnej, tzn.

$$D^2X = E(X - EX)^2.$$

Inaczej:

- jeżeli X jest zmienną losową typu dyskretnego, to

$$D^2X = \sum_{x_i \in W_x} (x_i - EX)^2 p_i,$$

- jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego, to

$$D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} (t - EX)^2 f(t) dt.$$

Twierdzenie 5 (Własności wariancji). *Jeżeli X i Y są zmiennymi losowymi oraz a, b, c są stałymi, to:*

1. $D^2(c) = 0$
2. $D^2(aX) = a^2 D^2 X$
3. $D^2(X + b) = D^2 X$
4. *gdy X i Y są niezależne, to $D^2(X + Y) = D^2 X + D^2 Y$*
5. $D^2 X = E(X^2) - (EX)^2$

Wartość

$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

nazywamy odchyleniem standardowym. Odchylenie standardowe jest ważnym pojęciem statystycznym.

1.4 Przegląd typowych rozkładów

1.4.1 Rozkład jednopunktowy

$$\frac{x_i}{p_i} \parallel \frac{x_1}{1}$$

Wtedy:

$$EX = x_1, \quad D^2 X = 0.$$

1.4.2 Rozkład zero–jedynekowy

Zmienna losowa X ma rozkład zero–jedynekowy z parametrem p , gdzie $p \in (0, 1)$, jeżeli jej rozkład prawdopodobieństwa jest postaci

$$\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array}$$

gdzie $q = 1 - p$.

Wtedy:

$$EX = p, \quad D^2 X = pq.$$

1.4.3 Rozkład dwumianowy

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy (rozkład Bernoulliego) z parametrami (n, p) , $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa jest postaci:

$$P(X = k) = P(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\},$$

gdzie $q = 1 - p$.

Wtedy:

$$EX = np, \quad D^2 X = npq.$$

1.4.4 Rozkład Poissona

Dyskretna mienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa jest postaci

$$p_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Przyjmuje ona zatem z dodatnim prawdopodobieństwem przeliczalną liczbę wartości (wartościami są wszystkie liczby $0, 1, 2, 3, \dots$).

Mamy:

$$EX = \lambda, \quad D^2X = \lambda.$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie łączące rozkłady dwumianowe z rozkładem Poissona:

Uwaga 9. Jeżeli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z parametrami, odpowiednio (n, p_n) oraz $\lambda > 0$ jest taka, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda,$$

to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1.4.5 Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X typu ciągłego ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$, jeżeli jej gęstość jest dana za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{dla } x \in [a, b], \\ 0, & \text{dla } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Wówczas dystrybuanta określona jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (-\infty, a), \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{dla } x \in [a, b], \\ 1, & \text{dla } x \in (b, \infty). \end{cases}$$

Mamy:

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad D^2X = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

1.4.6 Rozkład wykładniczy

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, jeżeli jej gęstość jest postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{dla } x \geq 0, \\ 0, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wówczas dystrybuanta określona jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wówczas:

$$EX = \lambda, \quad D^2X = \lambda^2.$$

Jedną z własności rozkładu wykładniczego jest tzw. brak pamięci, tzn. dla dowolnych $a, b > 0$ mamy

$$P(X \geq a + b | X \geq a) = P(X \geq b).$$

1.4.7 Rozkład normalny

Rozkład normalny jest jednym z najczęściej występujących rozkładów typu ciągłego.

Zmienna losowa X ma rozkład normalny (gaussowski) z parametrami μ i σ ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa określona jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozkład normalny z parametrami μ , σ oznaczamy symbolem

$$N(\mu, \sigma).$$

Mamy:

$$EX = \mu, \quad D^2X = \sigma^2.$$

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, to zmienna losowa $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ma tzw. standaryzowany rozkład normalny $N(0, 1)$. Wówczas jej gęstość wyraża się wzorem

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

a dystrybuanta:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Obliczenie wartości dystrybuanty $\Phi(x)$ nie jest łatwe, ponieważ występującej tam całki nie można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Do obliczenia wartości dystrybuanty rozkładu normalnego służą tablice.

1.5 Przedziały ufności

Sposobem estymacji (przybliżania), dającym możliwość oceny dokładności oceny wartości nieznanych parametrów, jest metoda przedziałowa polegająca na podaniu tzw. przedziałów ufności dla nieznanego parametru rozkładu.

Przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności α ($0 < \alpha < 1$) nazywamy przedział (θ_1, θ_2) spełniający warunki:

- jego końce $\theta_1 = \theta_1(X_1, \dots, X_n)$ i $\theta_2 = \theta_2(X_1, \dots, X_n)$ są wartościami próby losowej i nie zależą od szacowanego parametru θ ,
- prawdopodobieństwo pokrycia przez ten przedział nieznanego parametru θ jest równe $1 - \alpha$, tzn.

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha.$$

Liczbę $1 - \alpha$ nazywamy współczynnikiem ufności.

Jeżeli podczas badania cechy X uzyskujemy n wyników: X_1, \dots, X_n , to:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

oraz

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

1.5.1 Przedziały ufności dla wartości przeciętnej

Cecha X populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ o nieznannej wartości przeciętnej i znanym odchyleniu standardowym σ . Przy danej liczebności próby n i danym współczynniku ufności $1 - \alpha$ najkrótszym przedziałem ufności dla μ jest przedział

$$\left(\bar{X} - u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

gdzie $u(\beta)$ jest kwantylem rozkładu $N(0, 1)$ rzędu β , tzn. $\Phi(u(\beta)) = \beta$.

1.5.2 Przedziały ufności dla wariacji i odchylenia standardowego

Niech cecha X ma rozkładem $N(\mu, \sigma)$ o nieznanymi μ i σ . Próba liczy co najwyżej 50 jednostek ($n \leq 50$). Konstrukcję przedziału ufności oprzemy na statystyce

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

która ma rozkład chi-kwadrat o $n - 1$ stopniach swobody (wartości dystrybuanty tego rozkładu są tablicowane). Niech $\chi^2(\beta, n - 1)$ oznaczają kwantyle rozkładu chi-kwadrat o $n - 1$ stopniach swobody rzędu β . Wtedy przedział ufności dla wariacji przyjmuje postać:

$$\left(\frac{nS^2}{\chi^2(1 - \frac{1}{2}\alpha, n - 1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n - 1)} \right)$$

zaś dla odchylenia standardowego

$$\left(\sqrt{\frac{n}{\chi^2(1 - \frac{1}{2}\alpha, n - 1)}} S < \sigma < \sqrt{\frac{n}{\chi^2(\frac{1}{2}\alpha, n - 1)}} S \right)$$

W sytuacji, kiedy cecha ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanymi μ, σ oraz próba jest o liczebności $n \geq 50$. W tym przypadku statystyka

$$\sqrt{2\chi^2} = \sqrt{2 \frac{nS^2}{\sigma^2}} = \frac{S}{\sigma} \sqrt{2n}$$

ma w przybliżeniu rozkład $N(\sqrt{2n - 3}, 1)$. Zatem przedział ufności przybiera postać

$$\left(\frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n - 3} + u(1 - \frac{1}{2}\alpha)} < \sigma < \frac{S\sqrt{2n}}{\sqrt{2n - 3} - u(1 - \frac{1}{2}\alpha)} \right)$$