Zbiór zadań z Matematyki Stosowanej

1. Liczby zespolone

1. Znajdź postać trygonometryczną liczb

(a) $1+i$;

(b) $1-i$;

(c) $1+\sqrt{3}i$;

(d) $2\sqrt{3}-2i$;

(e) 4;

(f) $2i$.

2. Znajdź postać arytmetyczną liczb

(a) $3(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$;

(b) $8(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$;

(c) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

3. Oblicz potęgi

(a) $(1-i)^4$;

(b) $(1+\sqrt{3}i)^3$;

(c) $(\sqrt{3}-i)^6$.

4. Znajdź pierwiastki

(a) $\sqrt[3]{1}$;

(b) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;

(c) $\sqrt[3]{i}$;

(d) $\sqrt[6]{-64}$.

5. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej

(a) $|z+3-3i|>3,\ \operatorname{Arg} z\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$;

(b) $|z-(1+i)|\cdot|z-2+2i|\cdot|z+2-3i|=0$.

6. Rozwiąż równania

(a) $z^2+(2+2i)z+3-2i-0$;

(b) $z^2+(1+4i)z-5-i=0$;

(c) $z^2+2iz+i-1=0$.

(d) $z^3+z^2+z+1=0$.

(e) $z^4-5z^2+4=0$.

2. Funkcje wielu zmiennych

1. Oblicz granicę funkcji

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.

2. Sprawdź czy funkcja jest ciągła

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

3. Oblicz pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora $\mathbf{a}$

(a) $f(x,y)=x^4+y^4+2xy+1,\ x_0=(1,2),\ \mathbf{a}=(3,-1)$;

(b) $f(x,y,z)=x+y^2+xyz^3,\ x_0=(1,1,-1),\ \mathbf{a}=(2,0,1)$.

4. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$;

(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(c) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

5. Oblicz

(a) $u \times v,\ u \cdot v$ dla $u = [1,2,3],\ v = [-1,3,-2]$;

(b) $\operatorname{grad} f$ dla $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(c) $\operatorname{grad} f$ dla $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$;

(d) $\operatorname{div} f$ dla $f(x,y,z) = (x^2 + y, 2y^2 - z, 3z^2 + x)$;

(e) $\operatorname{rot} f$ dla $f(x,y,z) = (x^2 + y, 2y^2 - z, 3z^2 + x)$.

6. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$;

(b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

(c) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5$;

(d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy$;

(e) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y$;

(f) $f(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

(g) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

(h) $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

7. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

(a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;

(b) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$;

(c) $f(x,y,z) = xyz(1 - x - y - z)$;

(d) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$.

8. Znajdź warunkowe ekstrema lokalne funkcji f pod warunkiem M, gdzie

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$;

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2, x, y \geq 0\}$;

(d) $f(x,y) = x + y,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{x+y} = xy + 1\}$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1\}$;

(f) $f(x,y) = xy,\ M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$.

9. Znajdź przybliżoną wartość liczb

(a) $(1,02)^3 \cdot (0,997)^2$;

(b) $\sqrt[3]{(2,93)^3 + (4,05)^3 + (4,99)^3}$.

10. Zastosowania

(a) Obwód trójkąta wynosi $2p$. Jakie długości powinny mieć jego boki, aby pole było jak największe? (Wykorzystaj wzór Herona na pole trójkąta $P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, gdzie $p = \frac{1}{2}(x + y + z)$, x, y, z są długościami boków trójkąta.)

(b) Znajdź ekstrema funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ w kuli domkniętej $\overline{K}((0,0,0), 10)$, gdzie

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

3. Całki wielokrotne

1. Oblicz całki

(a) $\displaystyle\iint_P x^2y + x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ P = [-1,1] \times [0,1]$;

(b) $\displaystyle\iint_P 3x^2 + 2y - 4xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ P = [0,1] \times [0,1]$;

(c) $\displaystyle\iint_P \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x + y + 1)^3},\ P = [0,2] \times [0,1]$;

(d) $\displaystyle\iint_P x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ P=[0,1]\times[\pi,2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le x\le 1\}$;

(f) $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\}$;

(g) $\displaystyle\iint_D x+y+1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 3x\le 3\}$;

(h) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le \sqrt{x}\le 1\}$.

2. Oblicz całki korzystając ze współrzędnych biegunowych

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$;

(b) $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$;

(c) $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$;

(d) $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x^2+y^2\le x\}$.

3. Oblicz całki

(a) $\displaystyle\iiint_P \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{yz},\ P=[1,2]\times[1,\mathrm{e}]\times[1,\mathrm{e}]$;

(b) $\displaystyle\iiint_P x+y+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ P=[1,2]\times[2,3]\times[3,4]$;

(c) $\displaystyle\iiint_D \mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le -x\le y\le 1\}$;

(d) $\displaystyle\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(3x+2y+z+1)^4},\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\ge 0,\ 0\le z\le 1-x-y\}$;

(e) $\displaystyle\iiint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le y\le 1-x^2\}$;

(f) $\displaystyle\iiint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le y^2-x^2,\ 0\le x\le y\le 1\}$;

(g) $\displaystyle\iiint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le x\le \sqrt{9-z^2}\}$.

4. Oblicz całki korzystając ze współrzędnych sferycznych lub walcowych

(a) $\displaystyle\iiint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 9-x^2-y^2\}$;

(b) $\displaystyle\iiint_D x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 1,\ x^2+y^2\le 4\}$;

(c) $\displaystyle\iiint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 8\}$;

(d) $\displaystyle\iiint_D xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$;

(e) $\displaystyle\iiint_D z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{8-x^2-y^2}\}$;

(f) $\iiint\limits_D x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4x\};$

(g) $\iiint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\};$

(h) $\iiint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2},\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{1}{2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\};$

(i) $\iiint\limits_D z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$

5. Oblicz całki krzywoliniowe nieskierowane

(a) $\int\limits_K x + y \,\mathrm{d}l,\ K$ jest trójkątem o wierzchołkach $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1);$

(b) $\int\limits_K x^2 + y^2 \,\mathrm{d}l,\ K$ jest okręgiem o równaniu $y^2 + x^2 - x = 0;$

(c) $\int\limits_K x^2 + y^2 \,\mathrm{d}l,\ K$ jest krzywą o równaniach $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t),\ t \in [0, 2\pi].$

6. Oblicz całki krzywoliniowe skierowane

(a) $\oint\limits_K y^2 \,\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}y,\ K$ jest górną połową elipsy $x = a\cos t,\ y = a\sin t;$

(b) $\oint\limits_K (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (2xy + y^2)\,\mathrm{d}y,\ K$ jest łukiem paraboli $x = y^2$ od punktu $A(1,1)$ do $B(4,2);$

(c) $\oint\limits_K (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,\ K$ jest krzywą o równaniach $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$ w kierunku zgodnym ze wzrostem t.

7. Oblicz całki po powierzchni S

(a) $\iint\limits_S x^2 + y^2 \,\mathrm{d}S,\ S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = z \le 1\};$

(b) $\iint\limits_S 8 - 2z \,\mathrm{d}S,\ S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < 2z = 8 - x^2 - y^2\};$

(c) $\iint\limits_S x^2y^2 \,\mathrm{d}S,\ S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}.$

8. Zastosowania

(a) Znaleźć masę części kuli o promieniu R znajdującej się w pierwszej ósemce układu współrzędnych, jeżeli gęstość tej bryły jest w każdym jej punkcie równa odległości tego punktu od płaszczyzny OXY.

(b) Znaleźć masę części kuli o promieniu c leżącej w pierwszej ósemce układu współrzędnych i ograniczonej powierzchnią $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a, b \le c)$, wiedząc, że jej gęstość w każdym punkcie (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z) = z$.

(c) W półkuli określonej nierównościami $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge O$, gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości punktu od początku układu współrzędnych. Znaleźć współrzędne środka ciężkości tej bryły.

(d) Obliczyć współrzędne środka ciężkości bryły V określonej warunkami $y^2 \le 4x$, $2x+y+z \le 4$, $z \ge 0$.

(e) Wyznaczyć moment bezwładności walca obrotowego o wysokości h, promieniu podstawy a względem osi będącej średnicą podstawy walca.

(f) Znaleźć moment bezwładności stożka obrotowego o wysokości h, promieniu podstawy a, gęstości ρ, względem średnicy podstawy.

4. Równania różniczkowe

1. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) $y' = \mathrm{e}^y \sin x;$

(b) $\cos x \sin y\, y' - \sin x \cos y = 0;$

(c) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$;
(d) $y' = (x+y)^2$;
(e) $y' = x+y+3$;
(f) $y' = (x-y)^2+1$;
(g) $y' = 2y+3x$;
(h) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;
(i) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$;
(j) $xy' = x+y$;
(k) $y' = \dfrac{y}{x} + x^3,\ y(1)=1$;
(l) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y},\ y(1)=1$;
(m) $y' = \dfrac{y}{x} + nx^n$;
(n) $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$;
(o) $y' - 2xy = x - x^3$;
(p) $xy' + y = x\sin x$;
(q) $xy' - 2y = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;
(r) $y' = y^2 + 1 - x^2$;
(s) $y' = xy + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$;
(t) $y' = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-y} + 1$;

2. Rozwiąż liniowe równania różniczkowe
(a) $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$;
(b) $y'' + 4y = 0$;
(c) $y'' + y' - 2y = 0$;
(d) $y'' - 8y' + 16y = x\,\mathrm{e}^{2x}$;
(e) $y'' + 9y = x\cos x$;
(f) $y'' - 4y' + 4y = x^2$;
(g) $y'' + y' - 2y = 4x$;
(h) $y'' - 5y' = x$.

3. Zastosowania.
(a) Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $I(t)$ w obwodzie RC włączonym w chwili $t=0$ do źródła prądu zmiennego o napięciu $U = U_0\sin(\omega t)$. Obwód zawiera kondensator o pojemności C i opornik o oporze R. Wiemy, że szukana funkcja I spełnia równanie różniczkowe
$$RI'(t) + \frac{I(t)}{C} = U_0\omega\cos(\omega t).$$
(b) W pewnym ruchu prostoliniowym przyśpieszenie $x''(t)$ jest proporcjonalne do prędkości $x'(t)$, tzn. $x''(t) = kx'(t)$. Wyznaczyć równanie tego ruchu $x = f(t)$ przyjmując $k = 2$.
(c) W pewnym ruchu stosunek przyśpieszenia $x''(t)$ do przebytej drogi x jest wielkością stałą i wynosi -9. Wyznaczyć równanie tego ruchu.
(d) Wyznaczyć równanie ruchu, w którym stosunek przyśpieszenia do prędkości jest wielkością stałą i wynosi -3.
(e) Wyznaczyć natężenie prądu w zależności od czasu $I(t)$ dla obwodu RLC elektrycznego włączonego w chwili $t=0$ do źródła prądu zmiennego o napięciu $U = U_0\sin(\omega t)$. Obwód zawiera oporność R, indukcyjność L i pojemność C połączone w szereg. Wiemy, że szukana funkcja I spełnia równanie różniczkowe
$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{I(t)}{C} = U_0\omega\cos(\omega t).$$

5. Prawdopodobieństwo

1. Rozwiąż zadania.
(a) Cztery tomy dzieła ułożono losowo na półce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tomy zostały ułożone w kolejności 1, 2, 3, 4?

(b) W partii 100 elementów znajdują się 3 braki. Wybieramy losowo jeden element. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie on prawidłowy?

(c) W pudełku jest 90 sprawnych i 10 niesprawnych tranzystorów. Z pudełka wzięto 10 tranzystorów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wyjętych
- jest dokładnie jeden niesprawny tranzystor,
- nie ma tranzystorów niesprawnych.

(d) Rzucamy dwiema kostkami jednocześnie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
- suma oczek jest równa 4,
- suma oczek jest mniejsza od 5,
- suma oczek jest większa niż 8,
- suma oczek jest liczbą parzystą,
- różnica oczek (odejmujemy od liczby większej liczbę nie większą od pierwszej) jejst liczbą nieparzystą,
- iloczyn liczby oczek jest liczbą parzystą,
- wyrzucimy przynajmniej jedną szóstkę.

2. Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite.

(a) W urnie znajduje się 6 kul czarnych i 4 białe. Wyciągamy losowo 2 razy po jednej kuli, (1) ze zwrotem kuli do urny po pierwszym wyjęciu, (2) bez zwrotu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała, jeśli wiadomo, że pierwsza wylosowana była biała.

(b) Na pierwszym roku studiów pewnej uczelni studenci studiują na trzech wydziałach: W_1, W_2 i W_3. Ich liczebność na poszczególnych wydziałach wynosi odpowiednio: 180, 120, 90. Wiadomo, że prawdopodobieństwo terminowego ukończenia studiów dla poszczególnych wydziałów są równe: 0,8; 0,7; 0,5. Ze zbioru 390 studentów wylosowano studenta. Oblicz
- prawdopodobieństwo tego, że student studiuje na wydziale W_2,
- prawdopodobieństwo tego, że student ukończy studia w terminie,
- prawdopodobieństwo tego, że student studiował na wydziale W_3, jeżeli wiadomo, że ukończył studia w terminie.

(c) Z fabryki F_1 pochodzi 60% elementów, reszta z fabryki F_2. Niezawodność działania w określonym czasie T elementów z F_1 wynosi 95%, z F_2 - 90%. Pobrano losowo jeden element. Obliczyć prawdopodobieństwo niezawodnego działania elementu w czasie T.

(d) Na linii łączności nadaje się tylko dwa rodzaje sygnałów A i B z prawdopodobieństwami odpowiednio równymi 84% i 16%. Z powodu zakłóceń $\frac{1}{6}$ sygnałów A jest odbierana jako sygnały B, a $\frac{1}{8}$ sygnałów B jest odbierana jako sygnały A. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na punkcie odbiorczym pojawi się: (1) sygnał A, (2) sygnał B, (3) odebrano sygnał A, jakie jest prawdopodobieństwo, że nadano go?

(e) W zakładzie znajdują się 3 maszyny typu A, 5 typu B i 2 typu C, produkują one odpowiednio 5%, 3%, 1% braków:
- pobieramy losowo z całej przemierzonej masy towarowej jedną sztukę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie ona brakiem
- pobrano losowo jedną sztukę, która okazała się brakiem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z maszyny B.

3. Zmienne losowe.

(a) Dobrać tak stałą C, by funkcja
$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \le x < 3 \\ 0, & x < 0 \vee x \ge 3 \end{cases}$$
była gęstością prawdopodobieństwa, wyznaczyć dystrybuantę, obliczyć $P(|X| < 1)$.

(b) Niech zmienna losowa ma rozkład postaci
$$P(X = n) = p_n = \frac{c}{n(n+1)}, \ n \in \mathbb{N}.$$
Wyznacz wartość c tak, by ciąg $\{(n, p_n), n \in \mathbb{N}\}$ był rozkładem prawdopodobieństwa, podaj dystrybuantę zmiennej losowej X oraz oblicz prawdopodobieństwo $P(X \ge m)$ dla $m \in \mathbb{N}$.

(c) Wyznacz wartość c, dla której funkcja
$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & x \ge 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases}$$
jest gęstością zmiennej losowej X, podaj jej dystrybuantę oraz oblicz $P(X > 20)$.

(d) Zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej $Y = aX + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

(e) Niech X będzie zmienną losową jednostajną na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Znajdź rozkład zmiennej losowe $Y = sinX$.

(f) Pokazać, że jeżeli X jest zmienną losową dodatnią o gęstości f, to X^{-1} ma gęstość postaci $f(\frac{1}{x})/x^2$.

4. Wartość oczekiwana, wariancja.

(a) Rzucamy monetą 4 razy. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie wyrzuconych orłów:

- podać rozkład tej zmiennej losowej,
- obliczyć $E(X)$ i $D^2(X)$.
- obliczyć $P(1 \leq X < 3)$.

(b) Gracz rzuca raz kostką i otrzymuje 1 zł, gdy wyrzuci parzystą liczbę oczek, otrzymuje 2 zł, gdy wyrzuci 5 oczek, w pozostałych przypadkach przegrywa 3 zł;

- rozkład zmiennej losowej X, która jest wygraną gracza,
- wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X i naszkicować ją,
- wyznaczyć wartość przeciętną tej zmiennej i odpowiedzieć na pytanie, czy gra jest sprawiedliwa, tj. czy $E(X) = 0$.

(c) Dystrybuanta zmiennej losowej X określona jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x, & 0 \leq x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

- znaleźć gęstość,
- obliczyć $E(X)$, $D^2(X)$,
- obliczyć prawdopodobieństwo $P(0 \leq X \leq \pi)$.

(d) Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

- Naszkicować wykres gęstości i wyznaczyć dystrybuantę,
- obliczyć $E(X)$, $D^2(X)$,
- obliczyć $P(|X| \geq \frac{1}{2})$.

5. Przedziały ufności.

(a) Według normy technicznej wykonanie obróbki mechanicznej elementu silnika okrętowego powinno zajmować 20 min. Wylosowano 18 stanowisk roboczych, dla których średni czas obróbki wyniósł 22 min. Wiadomo, że odchylenie standardowe czasu obróbki wynosi 5 min. Zakładając, że rozkład czasu obróbki jest normalny, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę zerową $H_0: \ m = 20$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: \ m \neq 20$.

(b) Błąd pomiaru kątów pionowych za pomocą sekstansu ma rozkład normalny. Przeprowadzono 8 pomiarów tego samego kąta pionowego i otrzymano następujące wartości błędów (w min. kątowych)

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	$-1,4$	$-0,8$	$0,4$	$-0,2$	$0,8$	$1,0$	$1,8$	$2,2$

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,01$ zweryfikować hipotezę $H_0: \sigma^2 = 0,75$.