Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Macierze

Niech dane będą liczby $n, m \in \mathbb{N}$.
Każdą funkcję określoną na iloczynie kartezjańskim $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych lub zespolonych nazywamy *macierzą* o m wierszach i n kolumnach.
Zwykle macierz zapisujemy za pomocą tabelki (szachownicy) o m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

lub

$$[a_{ij}]_{i \in \{1,\ldots m\}, j \in \{1,\ldots n\}}$$

Symbol a_{ij} oznacza liczbę umieszczoną na skrzyżowaniu i–tego wiersza i j–tej kolumny.

Macierze

Jeżeli $m = n$, to macierz nazywamy macierzą kwadratową i wówczas n nazywamy stopniem macierzy.

Rozważmy macierz kwadratową stopnia n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wyrazy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ leżą na jednej przekątnej macierzy. Będziemy ją nazywali główną przkątną macierzy.

W dalszym ciągu będziemy macierze oznaczalui wielkimi literami $A, B, C, \dots$.

Macierze

Niech A i B będą macierzami o m wierszach i n kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Wówczas macierz

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy sumą macierzy A i B oraz oznaczamy

$$C = A + B$$

Macierze

Niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną oraz A niech będzie macierzą o m wierszach i n kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wówczas macierz

$$\alpha A = \alpha \cdot A = A \cdot \alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy iloczynem macierzy A przez liczbę (skalar) α.

Macierze

Własności dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A)$,

gdzie A i B są macierzami, a α, β liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi.

Macierze

Dla ułatwienia wprowadźmy oznaczenie:

$$A_{n\times n}$$

na macierz o m wierszach i n kolumnach.

Niech A będą macierzą o m wierszach i n kolumnach, zaś B macierzą o n wierszach i p kolumnach::

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

tzn.

$$A = A_{m\times n} \qquad B = B_{n\times p}$$

Macierze

Wtedy *iloczynem* macierzy $A = A_{m\times n}$ i $B = B_{n\times p}$ nazywamy macierz $C = C_{m\times p}$ taką, że

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i} b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{ip} \end{bmatrix}$$

tzn. $C = [c_{kl}]$, gdzie

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{il}$$

Uwaga: Mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierzy macierzy B.

Macierze

Własności działań na macierzach (cd):

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$,
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,
- $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$,

gdzie A, B, C są macierzami, zaś α jest skalarem.

Uwaga

Mnożenie macierzy nie jest przemienne, tzn.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Macierze

Macierzą jednostkową nazywamy macierz I postaci

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Jeśli macierz A jest macierzą kwadratową stopnia n, a I macierzą jednostkową stopnia n, to:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Wyznaczniki

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n.
Wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę $detA$ zdefiniowaną w sposób indukcyjny:

- wyznacznikiem macierzy $[a_{11}]$ nazywamy liczbę a_{11} tzn.

$$det[a_{11}] = a_{11},$$

- jeśli $n > 1$, to wyznacznikiem macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  nazywamy liczbę

$$detA = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}$$

  gdzie M_{1i} jest wyznacznikiem macierzy stopnia $n-1$ otrzymanej z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i i–tej kolumny ($i \in \{1, \ldots, n\}$).

Wyznaczniki

Minorem M_{ij} macierzy A będziemy nazywali wyznacznik macierzy stopnia $n-1$ powstałej z macierzy A poprzez skreślenie i–tego wiersza oraz j–tej kolumny.

Wyrażenie

$$(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

nazywamy rozwinięciem wyznacznika według i–tego wiersza, natomiast wyrażenie

$$(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}$$

nazywamy rozwinięciem wyznacznika według j–tej kolumny.

Twierdzenie

Rozwinięcie wyznacznika stopnia n według i–tego wiersza ($i \in \{1, \ldots, n\}$) lub j–tej kolumny ($j \in \{1, \ldots, n\}$) jest równe temu wyznacznikowi.

Wyznaczniki

Macierz *diagonalna* stopnia $n \geqslant 2$ jest to macierz, która poza główną przekątną ma wyłącznie zera:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jej wyznacznik jest równy:

$$detD = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Wyznaczniki

Własność 1

Wyznacznik danej macierzy kwadratowej jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej tej macierzy.

Własność 2

Wyznacznik macierzy, w której jeden wiersz składa się z samych zer, jest równy zero.

Własność 3

Zamiana dwóch różnych wierszy w macierzy kwadratowej powoduje zmianę znaku jej wyznacznika.

Własność 4

Jeżeli w macierzy kwadratowej dwa wiersze są identyczne, to jej wyznacznik jest równy zero.

Własność 5

Wspólny czynnik danego wiersza możemy wyciągnąć przed znak wyznacznika, tzn.

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda \cdot det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wyznaczniki

Własność 6

Jeżeli dwa wiersze wyznacznika są proporcjonalne, to wyznacznik ten jest równy zero.

Własność 7

Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do jednego wiersza dodamy inny (dodając do siebie odpowiednie wyrazy) wiersz pomnożony przez dowolną stałą.

Wyznaczniki

Twierdzenie Cauchy'ego

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$$

Wyznaczniki

Każdą macierz kwadratową o wyznaczniku różnym od zera nazywamy *macierzą nieosobliwą*.

Twierdzenie

Dla każdej macierzy kwadratowej A istnieje co najwyżej jedna macierz B taka, że

$$B \cdot A = A \cdot B = I.$$

Jeśli dla danej macierzy kwadratowej A istnieje macierz B spełniająca powyższą równość, to tę (jedyną) macierz B nazywamy *macierzą odwrotną* i oznaczamy symbolem A^{-1}.

Twierdzenie

Dana macierz kwadratowa ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa

Układy równań

Rozpatrzmy układ n równań liniowych o n niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą układu (1). Układ (1) nazywamy *układem Cramera*, jeśli macierz A układu (1) jest nieosobliwa, tzn. $detA \neq 0$. Liczbę $detA$ nazywamy wyznacznikiem układu (1), a macierz $[b_1, \ldots, b_n]^T$ nazywamy kolumną wyrazów wolnych tego układu.

Układy równań

Niech $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ i $b = [b_1, \ldots, b_n]^T$. Wówczas układ (1) możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

lub

$$A \cdot x = b$$

Układy równań

Każdy układ liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniający układ (1) nazywamy rozwiązaniem układu (1).

Twierdzenie Cramera

Każdy układ Cramera postaci (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest ono dane wzorem

$$x_k = \frac{detA_k}{detA}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\},$$

gdzie A_k jest macierzą powstałą z macierzy A układu (1) przez zastąpienie k–tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych.

Powyższe wzory noszą nazwę wzorów Cramera.

Układy równań

Jeżeli kolumna wyrazów wolnych w układzie (1) jest zerowa, tzn. $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, to układ taki nazywamy *układem jednorodnym*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Z twierdzenia Cramera wynika, że jeśli wyznacznik układu (2) jest różny od zera, to ukałd ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, dokłądniej: rozwiązanie zerowe, tzn. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Wniosek

1. Jednorodny układ Cramera (2) ma tylko rozwiązanie zerowe.
2. Jeżeli układ równań (2) ma rozwiązanie niezerowe, to wyznacznik tego układu jest równy zero.

Układy równań

Jeśli z macierzy prostokątnej (niekoniecznie kwadratowej) skreślimy pewną ilość wierszy lub kolumn, tak aby elementy nieskreślone utworzyły macierz kwadaratową, to jej wyznacznik będziemy nazywali minorem macierzy.

Rzędem macierzy nazywamy najwyższy za stopni tych jej minorów, które są różne od zera.
Rząd macierzy A będziemy oznaczać symbolem $r(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie zmieni się, gdy:

- zamienimy wiersze na kolumny,
- przestawimy wiersze,
- wiersze pomnożymy przez liczbę różną od zera,
- do jednego wiersza dodamy inny pomnożony przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Układy równań

Rozważmy następujący układ m równań o n niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

w którym $m, n > 1$ oraz a_{ij}, b_i $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ należą do zbioru liczb rzeczywistych lub zespolonych.

Układy równań

Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Przy tych oznaczeniach układ (3) przyjmuje postać

$$Ax = b$$

Macierz A nazywamy macierzą układu (3), natomiast macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą uzupełnioną układu (3).

Twierdzenie Kroneckera–Capelliego

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by układ (3) miał rozwiązanie, jest aby
$$r(A) = r(B).$$

- Układ, który nie ma rozwiązań nazywamy układem sprzecznym.
- Dwa układy równań są równoważne, jeżeli mają te same zbiory rozwiązań.

Układy równań

Twierdzenie

Założmy, że układ (3) ma rozwiązanie i $r(A) = r$. Niech $M \neq 0$ będzie minorem stopnia r macierzy A. Usuńmy z układu (3) te równania, których współczynniki nie są elementami minora M. Otrzymany układ jest równoważny układowi (3).

Twierdzenie

Niech macierz A układu równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$

ma rząd równy r. Wówczas wszystkie rozwiązania tego układu otrzymujemy, traktując $(n-r)$ niewiadomych jako parametry, pozostałe zaś niewiadome obliczając wzorami Cramera.

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ jednorodny (2) miał rozwiązanie niezerowe, jest aby wyznacznik tego układu był równy zero.