Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Całka oznaczona

Niech $P = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem.

Podziałem przedziału P będziemy nazywali każdą skończoną rodzinę $\Pi = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ takich przedziałów, że

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$$

oraz

$$int(P_i) \cap int(P_j) = \emptyset, \qquad \text{dla } i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, m\}$$

Oznaczając przez $|I|$ długość przedziału I otrzymujemy

$$|P| = \sum_{i=1}^{m} |P_i| = b - a$$

Przedziały P_i możemy zapisać w postaci $[x_{i-1}, x_i]$ dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$. Wówczas $|P_i| = x_i - x_{i-1}$.

Całka oznaczona

Podział $\Sigma = \{K_1, K_2, \ldots, K_l\}$ nazywa się podpodziałem podziału Π, jeśli

$$\bigwedge_{i\in\{1,\ldots,l\}} \bigvee_{j\in\{1,\ldots,m\}} K_i \subseteq P_j$$

Liczbę

$$\delta(\Pi) = \max(|P_1|, |P_2|, \ldots, |P_m|)$$

nazywamy *średnicą podziału* Π.

Całka oznaczona

Niech $f\colon P \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją ograniczoną. Wtedy niech

$$M = \sup f(P), \qquad M_k = \sup f(P_k)$$

$$m = \inf f(P), \qquad m_k = \inf f(P_k)$$

oraz

$$s(f, P, \Pi) = \sum_{k=1}^{m} m_k |P_k|, \qquad S(f, P, \Pi) = \sum_{k=1}^{m} M_k |P_k|$$

Liczby $s(f, P, \Pi)$ oraz $S(f, P, \Pi)$ nazywamy *sumami aproksymacyjnymi*, odpowiednio *dolną* i *górną*, funkcji f na przedziale P dla podziału Π.
Z definicji wynika bezpośrednio, że

$$m|P| \leqslant s(f, P, \Pi) \leqslant S(f, P, \Pi) \leqslant M|P|$$

Uwaga:
Jeśli $\Sigma = \{K_1, K_2, \dots K_l\}$ jest podpodziałem podziału $\Pi = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, to

$$s(f, P, \Pi) \leqslant s(f, P, \Sigma), \quad \text{oraz} \quad S(f, P, \Sigma) \leqslant S(f, P, \Pi)$$

Uwaga:
Jeśli Π_1 i Π_2 są dwoma podziałami przedziału P, to

$$m|P| \leqslant s(f, P, \Pi_1) \leqslant S(f, P, \Pi_2) \leqslant M|P|.$$

Całka oznaczona

Z powyższej nierówności wynika, że istnieją liczby rzeczywiste

$$\underline{I(f,P)} = \sup_{\Pi} s(f,P,\Pi), \qquad \overline{I(f,P)} = \inf_{\Pi} S(f,P,\Pi)$$

oraz zachodzi nierówność

$$\underline{I(f,P)} \leqslant \overline{(I(f,P)}.$$

Oznaczenia:

- $\overline{I(f,P)}$ – całka górna.
- $\underline{I(f,P)}$ – całka dolna,

Mówimy, że funkcja f jest *całkowalna w przedziale P w sensie Riemanna*, jeśli całka dolna jest równa całce górnej.

Całka oznaczona

Wspólną wartość tych całek nazywamy *całką Riemanna funkcji f w przedziale* $P = [a, b]$ i oznaczamy

$$\int\limits_P f \quad \text{lub} \quad \int\limits_{[a,b]} f \quad \text{lub} \quad \int\limits_a^b f \quad \text{lub} \quad \int\limits_a^b f(x)dx$$

Liczby a i b nazywamy granicami całkowania. odpowiednio dolną i górną.

Ponadto przyjmujemy:

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f$$

Całka oznaczona

Uwaga: Nie każda funkcja ograniczona na przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna!

Przykład: Funkcja Dirichleta

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$, ale jest ograniczona.

Całka oznaczona

Lemat

Funkcja ograniczona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział Π przedziału $[a,b]$ taki, że

$$S(f,[a,b],\Pi) - s(f,[a,b],\Pi) < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest całkowalna w $[a,b]$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to jest całkowalna.

Własności całki oznaczonej

Własność 1

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz

$$m = \inf f([a, b]) \qquad M = \sup f([a, b])$$

to zachodzi następująca nierówność

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Własności całki oznaczonej

Własność 2

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i nieujemna, to

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Własność 3

Jeśli funkcja jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to jest całkowalna na każdym podprzedziale przedziału $[a, b]$.

Własność 4

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, a $\Pi = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ jest podziałem przedziału $[a, b]$, to funkcja f jest całkowalna na każdym z przedziałów $P_1, P_2, \ldots, P_m$ i zachodzi wzór

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{P_k} f(x)dx.$$

Własności całki oznaczonej

Własność 5

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i $\alpha \in \mathbb{R}$, to funkcja αf jest całkowalna w $[a,b]$ oraz

$$\int\limits_a^b \alpha f = \alpha \int\limits_a^b f.$$

Własność 6

Jeśli funckje f_1, f_2 są całkowalne w przedziale $[a,b]$, to funkcja $f_1 + f_2$ też jest całkowalna w $[a,b]$ oraz

$$\int\limits_a^b (f_1 + f_2) = \int\limits_a^b f_1 + \int\limits_a^b f_2.$$

Własności całki oznaczonej

Własność 7

Jeśli funkcje $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne oraz

$$f(x) \geqslant g(x), \qquad x \in [a, b]$$

to

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Własność 8

Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną oraz niech $g\colon [\inf f([a, b]), \sup f([a, b])] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja $g \circ f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest wtedy całkowalna.

Własności całki oznaczonej

Własność 9

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to funkcja f^2 również jest całkowalna w przedziale $[a,b]$.

Własność 10

Jeśli funkcje $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne, to funkcja $f \cdot g$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$.

Własność 11

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to funkcja $|f|$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$ oraz

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Własności całki oznaczonej

Własność 12

Dla dowolnych funkcji f i g całkowalnych w przedziale $[a, b]$ zachodzi nierównoś,ć schwarza:

$$\left(\int_a^b f \cdot g\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right) \cdot \left(\int_a^b g\right).$$

Własność 13

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\bigvee_{\xi \in [a,b]} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Jeśli funcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieujemna i całkowalna, to ustalając podział

$$\Pi = \{[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, b]\}$$

możemy interpretować składniki sum aproksymacyjnych $s(f, [a,b], \Pi)$ oraz $S(f, [a,b], \Pi)$ jako pola pewnych prostokątów, a same sumy jako pola pewnych wielokątów. Wtedy pole zawarte pomiędzy osią OX, a wykresem funkcji f w przedziale $[a,b]$ jest całką z funkcji f w tym przedziale. Oznaczając symbolem D ten obszar, a jako $|D|$ jego pole dostajemy

$$|D| = \int_a^b f(x)dx.$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

W szczególności, jeśli $f_1, f_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi oraz $f_1 \geqslant f_2$ w przedziale $[a, b]$, to pole $|D|$ obszaru D zawartego pomiędzy wykresami funkcji f_1 i f_2 w przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b (f_1 - f_2).$$

Własności całki oznaczonej

Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną i niech $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{1}$$

Funkcję F nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania*.

Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego

Funkcja F określona wzorem (1) jest ciągła. Ponadto, jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to funkcja F jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Własności całki oznaczonej

Wniosek

Każda funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$ ma w przedziale $[a, b]$ funkcję pierwotną (z więc i całkę nieoznaczoną). Jedną z funkcji pierwotnych jest funkcja dana wzorem (1).

Wzór Newtona–Leibniza

Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, a funkcja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Załóżmy, że funkcje $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są klasy C^1. Wówczas

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, a funkcja $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ jest klasy C^1 i $a = \varphi(\alpha)$ oraz $b = \varphi(\beta)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Całka niewłściwa

Do tej pory rozważaliśmy pojęcie całki funkcji okmreślonej na przedziale domkniętym (a zatem też ograniczonym) i organiczonej w tym przedziale. Chcielibyśmy spróbować osłabić te założenia. W tym celu zdefiniujemy tzm. *całkę niewłaściwą*.

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, gdzie $-\infty < a < b \leqslant \infty$, jest całkowalna w każdym przedziale $[c,d] \subseteq [a,b)$. Dla każdego $d \in (a,b)$ istnieje całka

$$I(d) = \int_a^d f(x)dx.$$

Punkt b nazywamy *punktem osobliwym* funkcji f, jeśli

- albo $b = +\infty$,
- albo $b \in \mathbb{R}$ oraz $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$.

Całka niewłściwa

Jeśli b jest punktem osobliwym funkcji f i istnieje skończona granica

$$\lim_{d \to b^-} I(d),$$

to granicę tę mazywamy całką niewłaściwą funkcji f w przedziale $[a, b)$ i oznaczamy

$$\int_a^b f \qquad \text{lub} \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Zatem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to b^-} \int_a^d f(x)dx.$$

Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ nie istnieje.

Całka niewłściwa

Podobnie mówimy, że, punkt a jest punktem osobliwym funkcji $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b < \infty$, jeśli

- albo $a = -\infty$,
- albo $a \in \mathbb{R}$ oraz $\lim\limits_{x \to a^+} |f(x)| = \infty$.

Jeśli f jest całkowalna w każdym przedziale $[c, d] \subseteq (a, b]$. Dla każdego $c \in (a, b)$ istnieje całka

$$\int\limits_c^b f(x)dx.$$

to granicę tę mazywamy całką niewłaściwą funkcji f w przedziale $(a, b]$ i oznaczamy

$$\int\limits_a^b f \qquad \text{lub} \qquad \int\limits_a^b f(x)dx$$

Całka niewłściwa

Zatem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_a^d f(x)dx.$$

Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ nie istnieje.

Jeśli istnieje

$$\int_a^b f(x)dz$$

to mówimy, że całka ta jest zbieżna. Jeżeli istnieje całka

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

to mówimy, że jest ona bezwzględnie zbieżna.

Całka niewłściwa

Twierdzenie

Załóżmy, że b jest punktem osobliwym funkcji f, a $F\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz

$$|f(x)| \leqslant F(x), \qquad x \in [a,b).$$

Załóżmy, że istnieje całka

$$\int_a^b F(x)dx.$$

Wówczas istnieje całka

$$\int_a^b f(x)dx$$

i jest bezwzględnie zbieżna.