Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Pochodna funkcji

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją oraz $x, x_0 \in (a, b)$ będą różnymi punktami przedziału (a, b). Wyrażenie

$$I_f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f między punktami x i x_0.
Jeśli $h = x - x_0$, to możemy też napisać

$$I_f(x_0 + h, x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pochodna funkcji

Jeśli istnieje granica ilorazu $I_f(x_0 + h, x_0)$ przy $h \to 0$, to granicę tę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie* x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$, tzn.:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jeśli f ma pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to mówimy, że f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0.
Jeżeli f ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b), to mówimy, że f jest różniczkowalna w zbiorze (a, b).

Pochodna funkcji

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to f jest ciągła w punkcie x_0.

Interpretacja fizyczna pochodnej:
Niech funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$.
Niech $x_0, x_0 + h \in (a, b)$.
Rozważmy punkty:

$$A = (x_0, f(x_0)), \qquad B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Punkty A i B należą do wykresu funkcji f. Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B jest postaci

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

lub równoważnie:

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} x + f(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} x_0$$

Współczynnik kierunkowy tej prostej, to iloraz różnicowy $I_f(x_0 + h, x_0)$.
Jeśli $h \to 0$ (tzn. punkt B zbliża się do pubnktu A) otrzymujemy:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Prostą o takim równaniu nazywamy prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Pochodne funkcji elementarnych:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pochodna funkcji

Twierdzenie

Jeśli funkcje $f, g\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $\lambda \in (a, b)$, to funkcje $f + g$, $f - g$, λf, $f \cdot g$ również są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz:

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$,
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Jeśli, ponadto, $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest vróżniczkowalna w punkcie x_0 oraz

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Pochodna funkcji

Twierdzenie

Załóżmy, że $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i odwracalną. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $f'(x_0) \neq 0$, to $y_0 = f(x_0)$ jest punktem wewnętrznym przedziału $f((a, b))$ oraz f^{-1} jest funkcją różniczkowalną w punkcie y_0 oraz zachodzi wzór

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Pochodna funkcji

Twierdzenie

Jeśli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma pochodną w punkcie $x_0 \in (a,b)$ oraz $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ ma pochodną w punkcie $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$, to funkcja

$$h = g \circ f$$

jest określona i różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz zachodzi wzór

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Różniczka funkcji

Odwzorowanie $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy liniowym, gdy:

- $A(x+y) = A(x) + A(y)$, dla $x, y \in \mathbb{R}$,
- $A(cx) = cA(x)$, dla $x, c \in \mathbb{R}$.

Uwaga: Więcej informacji o odwzorowaniach liniowych będzie w innej części wykładu.

Różniczka funkcji

Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oraz $x_0 \in (a,b)$.
Mówimy, że funkcja f ma *różniczkę* w punkcie x_0, gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe $df_{x_0}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df_{x_0}(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

lub

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Odwzorowanie liniowe df_{x_0} nazywamy różniczką funkcji f w pubnkcie x_0.

Różniczka, a pochodna funkcji

Twierdzenie

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma różniczkę df_{x_0} w punkcie $x_0 \in (a,b)$, to ma w tym punkcie pochodną $f'(x_0)$ oraz

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h, \qquad h \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Na odwrót, jeśli f ma w punkcie x_0 pochodną, to ma w tym punkcie różniczkę df_{x_0}, która dana jest wzorem (1).

Pochodne wyższych rzędów

Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Jeśli funkcja f' jest różniczkowalna, to
$$f'' = (f')'$$
- Jeśli, dla $n \in \mathbb{N}$, funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna, to
$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem, $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że funkcja jest *klasy* $C^n(P)$ jeżeli n–ta pochodna funkcji f istnieje w przedziale P i jest funkcją ciągłą na tym przedziale.

Oznaczenie:
$$f \in C^n(P)$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie Rolle'a

Jeśli funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to

$$\bigvee_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) = 0.$$

Twierdzenie Lagrange'a

Jeśli funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b), to

$$\bigvee_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Twierdzenie o wartości średniej

Twierdzenie Cauchy'ego

Jeśli funkcje $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalne w przedziale (a, b), to:

$$\bigvee_{\xi \in (a,b)} [f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi).$$

Wzór Taylora

Twierdzenie Taylora

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że $h \in \mathbb{R}$ jest taką liczbą, że $x_0 + h \in (a, b)$. Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $(n-1)$ w przedziale $[x_0, x_0 + h]$ oraz f jest n–krotnie różniczkowalna w przedziale $(x_0, x_0 + h)$, to istnieje takie $\theta \in (0, 1)$, że

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n(x_0, h),$$

gdzie

$$R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Wzór Taylora

Szereg Taylora

Jeżeli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma w pewnym otoczeniu U_{x_0} punktu $x_0 \in (a, b)$ pochodne dowolnego rzędu i dla $x \in U_{x_0}$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x_0, h) = 0,$$

to

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Regułą de l'Hospitala

Twierdzenie de l'Hospitala

Niech A będzie jednym ze zbiorów postaci:

$$A = (a, x_0), gdzie - \infty \leqslant a < x_0 \leqslant +\infty,$$
$$A = (x_0, a), gdzie - \infty \leqslant x_0 < a \leqslant +\infty,$$
$$A = (a, x_0) \cup (x_0, b), gdzie - \infty \leqslant a < x_0 < b \leqslant +\infty.$$

Załóżmy, że funkcje $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in A$. Załózmy dodatkowo, że zachodzi jeden z następujących warunków

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0, \quad lub \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Jeśli istnieje granica, bądź granica niewłaściwa $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, to

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz ma ekstremum lokalne w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Twierdzenie

Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeśli $f\colon P \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 0$ dla $x \in P$, to f jest stała.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna.

- Jeżeli $f' > 0$ w przedziale (a, b), to f jest silnie rosnąca w przedziale (a, b).
- Jeżeli $f' < 0$ w przedziale (a, b), to f jest silnie malejąca w (a, b).

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Twierdzenie

Załóżmy, że $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna.

- Jeżeli $f'' > 0$ w przedziale (a, b), to f jest wypukła w przedziale (a, b).
- Jeżeli $f'' < 0$ w przedziale (a, b), to f jest wklęsła w przedziale (a, b).

Twierdzenie

Jeśli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $f'(x_0) = 0$ dla pewnego punktu $x_0 \in (a,b)$ oraz f' zmienia znak w punkcie x_0, to f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0. Jest to:

- maksimum, jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest pewną stałą,
- minimum, jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest pewną stałą.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Twierdzenie

Jeśli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ w pewnym punkcie $x_0 \in (a,b)$, to f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i jest to:

- maksimum, jeśli $f''(x_0) < 0$,
- minimum, jeśli $f''(x_0) > 0$.

Załóżmy, że $x_0 \in (a, b)$ oraz $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest

- wypukła (wklęsła) w przedziale (a, x_0),
- wklęsła (wypukła) w przedziale (x_0, b).

Punkt x_0 nazywamy wówczas *punktem przegięcia* funkcji f.

Twierdzenie

Jeśli $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2, a $x_0 \in (a, b)$ jest punktem przegięcia funkcji f, to

$$f''(x_0) = 0$$

Asymptoty

Załóżmy, że $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Prostą o równaniu $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną prawostronną, jeśli

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Wtedy:

- $a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$,
- $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$.

Uwaga: Dla $-\infty$ asymptotę ukośną lewostronną definiujemy analogicznie.

Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy *asymptotą pionową* funkcji f, jeśli f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu c oraz

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \textit{lub} \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

Całka nieoznaczona

Niech $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ oraz niech będzie dana funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.

Każdą funkcję różniczkowalną $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taką, że

$$F' = f$$

nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f.

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to rodzinę wszystkich jej funkcji pierwtonych nazywamy *całką nieoznaczoną* z funkcji f i oznaczamy $\int f$ lub $\int f(x)dx$, tzn.

$$\int f = \int f(x)dx =$$

$$= \{F\colon (a,b) \to \mathbb{R} | F \text{ jest różniczkowalna na } (a,b) \wedge F' = f\}$$

O funkcji, która ma funkcję pierwotną mówimy, że jest *całkowalna*.

Podstawowe całki:

$f(x)$	$\int f(x)dx$	
0	c	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	
e^x	$e^x + c$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	- $\operatorname{ctg} x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	

Całka nieoznaczona

Własności całki nieoznaczonej

Niech $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjam całkowalnymi. Wówczas $f+g$ oraz λf, dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, są funkcjami całkowalnymi oraz

- $\int (f+g) = \int f + \int g$,
- $\int \lambda f = \lambda \int f$.

Uwaga

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad x \in (a,b).$$

Całka nieoznaczona

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi oraz $f'g$ ma pierwotną. Wówczas funkcja fg' również ma pierwotną oraz zachodzi wzór

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Niech $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, a $\varphi\colon (c, d) \to (a, b)$ funkcją różniczkowalną. Wówczas $(f \circ \varphi)\varphi'$ jest całkowalna oraz

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \varphi.$$