Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Niech $Y \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{N}$.
Dowolną funkcję $f : A \to Y$ nazywamy *ciągiem* elementów zbioru Y.
Najczęściej mamy: $A = \mathbb{N}$, tzn. $f : \mathbb{N} \to Y$.
Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to powiemy, że ciąg jest ciągiem rzeczywistym.
Oznaczenie: Zamiast pisać $f(n)$ piszemy a_n.

Ciąg (a_n) jest **ograniczony**, jeżeli

$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leqslant M$$

Granica ciągu

Definicja zbieżności ciągów

Ciąg rzeczywisty (a_n) jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}$ jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geqslant n_0} |a_n - g| < \varepsilon$$

Inaczej, mówimy też, że ciąg (a_n) ma granicę w g i piszemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Granica ciągu

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Uwaga

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$
- Jeżeli $a_n = a$ (tzn. ciąg a_n jest ciągiem stałym), to $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Twierdzenie

Jeżeli ciąg rzeczywisty jest zbieżny, to każdy jego podciąg też jest zbieżny do tej samej granicy.

Granica ciągu

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Z każdego rzeczywistego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Granica ciągu

Własności ciągów zbieżnych

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- Jeżeli dodatkowo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$,

Twierdzenie o trzech ciągach

Niech (a_n), (b_n) i (c_n) będą ciągami liczb rzeczywistych. Jeżeli

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

Przykłady:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b), \quad a, b \geqslant 0.$

Wniosek

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz (b_n) jest ciągiem ograniczonym, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie o zachowaniu nierówności w granicy

Jeśli $A \leqslant a_n \leqslant B$, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to

$$A \leqslant a \leqslant B$$

Wniosek

Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ oraz

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant b_n$$

to

$$a \leqslant b$$

Granica ciągu

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do* $+\infty$ jeżeli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geqslant n_0} a_n \geqslant M$$

co zapisujemy: $\lim\limits_{n \to \infty} = +\infty.$

Mówimy, że ciąg (a_n) jest *rozbieżny do* $-\infty$ jeżeli

$$\bigwedge_{M<0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geqslant n_0} a_n \leqslant M$$

co zapisujemy: $\lim\limits_{n \to \infty} = -\infty.$

Uwaga: W powyższych sytuacjach mówimy, że ciąg ma granicę niewłaściwą.

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu rozbieżnego do $+\infty$ (rozbieżnego do $-\infty$) jest rozbieżny do $+\infty$ (rozbieżny do $-\infty$).

Twierdzenie

- Jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony, a ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$$

- Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$$

  Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$$

Inaczej:

- $\infty + a = a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$,
- jeżeli $a > 0$, to:
  $\infty \cdot a = \infty$, $-\infty \cdot a = -\infty$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{-\infty}{a} = -\infty$,
- jeżeli $a < 0$, to:
  $\infty \cdot a = -\infty$, $-\infty \cdot a = \infty$, $\frac{\infty}{a} = -\infty$, $\frac{-\infty}{a} = \infty$,
- $\frac{a}{\infty} = 0$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$.

Symbole nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$,
- 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Niech dany będzie ciąg rzeczywisty (a_n). Definiujemy nowy ciąg (S_n) wzorami:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

Szeregi liczbowe

Ciąg (S_n) nazywamy *szeregiem liczbowym* o wyrazach $a_1, a_2, \ldots$ i zapisujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Liczbę S_n nazywamy n–tą sumą częściową szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Jeśli istnieje

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R},$$

to liczbę S nazywamy *sumą szeregu* i mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*.
W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest rozbieżny.
Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem wyrazów szeregu (S_n).

Twierdzenie

Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne. Wówczas zbieżne są również następujące szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$$

dal $\lambda \in \mathbb{R}$. Ponadto zachodzą wzory

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Szeregi liczbowe

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg jest zbieżny, to ciąg jego wyrazów jest zbieżny do zera.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) spełniają następujące założenia

$$a_n \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

oraz istnieje $g \geqslant 0$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$$

to

- szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
- szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) spełniają następujące założenia

$$a_n > 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

oraz istnieje $g \geqslant 0$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$$

to

- szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
- szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,

Kryterium Leibniza

Jeżeli ciąg (a_n) jest malejący oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

jest zbieżny.

Kryterium porównawcze

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ spełniają nierówności

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

to

- jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,,
- jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Granica funkcji

Dowolny przedział otwarty (a, b) zawierający x nazywamy *otoczeniem* punktu x.
Niech $x \in (a, b)$. Wówczas zbiór

$$(a, x) \cup (x, b)$$

nazywamy *sąsiedztwem* punktu x.
Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ jeżeli w każdym sąsiedztwie punktu x_0 znajdują się elementy zbioru A, tzn. istnieje ciąg (a_n) taki, że

$$a_n \in A \setminus \{x_0\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczamy symbolem A^d.

Granica funkcji

Definicja Heinego

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$. Wtedy funkcja f ma *granicę w punkcie* x_0 równą $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy w postaci

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) elementów zbioru $D \setminus \{x_0\}$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Granica funkcji

Definicja Cauchy'ego

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym, a $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i $x_0 \in D^d$. Wtedy funkcja f ma w punkcie x_0 granicę równą $g \in \mathbb{R}$ jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D} (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

Granice jednostronne:
Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$

- Mówimy, że f ma *granicę lewostronną* w punkcie $x_0 \in (a, b]$ równą g, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in (a, b)$, $x_n < x_0$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

- Mówimy, że f ma *granicę prawostronną* w punkcie $x_0 \in [a, b)$ równą g, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in (a, b)$, $x_n > x_0$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Granica funkcji

Symbolem

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$$

będziemy oznaczali granicę lewostronną.

Symbolem

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$$

będziemy oznaczali granicę prawostronną.

Twierdzenie

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Odwzorowanie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ granicę wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice lewostronna i prawostronna funkcji f w punkcie x_0 i są sobie równe.

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje f i g mają granice

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = b$$

to funkcje $f + g$, $f \cdot g$ oraz λf również mają granice w punkcie x_0 oraz

- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$,
- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda a$,
- jeśli dodatkowo $b \neq 0$, to $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Własności granicy funkcji

Twierdzenie o trzech funkcjach

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeśli funkcje $f, g, h \colon D \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

dla wszystkich x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0 oraz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a$$

to istnieje granica funcji g w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a$$

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje f i g mają granice

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = b$$

oraz

$$f(x) \leqslant g(x)$$

dla wszystkich x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to

$$a \leqslant b$$

Własności granicy funkcji

Twierdzenie

Każda rzeczywista funkcja monotoniczna w przedziale $P \subseteq \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie $x_0 \in intP$ obydwie granice jednostronna

Uwaga: Granice te nie muszą być sobie równe.

Granica funkcji

Niech $a \in \mathbb{R}$.
Mówimy, że funkcja $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ma granicę równą g w $+\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$$

jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów zbioru $(a, +\infty)$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.
Mówimy, że funkcja $f\colon (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ ma granicę równą g w $-\infty$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$$

jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów zbioru $(-\infty, a)$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Uwaga:
Możliwa jest sytuacja, kiedy w definicji granicy funkcji w punkcie $g = +\infty$ lub $g = -\infty$. Wtedy, jeśli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

lub

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

to mówimy, że f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą.

Funkcje ciągłe

Funkcja ciągła w punkcie

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. Funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- x_0 jest punktem izolowanym zbioru D, tzn.

$$\bigvee_{\varepsilon>0} (D \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \emptyset$$

  (x_0 nie jest punktem skupienia zbioru D),
- jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru D, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funkcje ciągłe

Twierdzenie

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym, a $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Wtedy funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0 jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D} (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

Funkcja ciągła

Mówimy, że funkcja jest *ciągła*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Funkcje ciągłe

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli funkcje $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in D$, to ciągłe w punkcie x_0 są również funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, λf (dla $\lambda \in \mathbb{R}$). Jeśli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ również jest ciągła w punkcie x_0

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech funkcja $f \colon D \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w punkcie $x_0 \in D$. Jeżeli ciąg (x_n) elementów zbioru D jest taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, to

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Funkcje ciągłe

Twierdzenie

Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in D$. Jeśli funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja $g\colon f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $f(x_0)$, to odwzorowanie $g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłe w punkcie x_0.

Ekstrema

Niech dany będzie niepusty zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz funkcja $f : D \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum* jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D} f(x) \leqslant f(x_0)$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *minimum* jeżeli

$$\bigwedge_{x \in D} f(x) \geqslant f(x_0)$$

Ekstrema

Niech dany będzie niepusty zbiór $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz funkcja $f : D \to \mathbb{R}$.
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *maksimum lokalne* jeżeli istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że

$$\bigwedge_{x \in D \cap U} f(x) \leqslant f(x_0)$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ *minimum lokalne* jeżeli istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że

$$\bigwedge_{x \in D \cap U} f(x) \geqslant f(x_0)$$

Ekstrema

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje oba ekstrema (maksimum oraz minimum).

Funkcje ciągłe

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Własność Darboux

Mówimy, że y leży między a i b jeżeli

$$a < y < b \qquad lub \qquad b < y < a.$$

Niech $\subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem, a $P \subseteq D$ będzie przedziałem. Mówimy, że funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux w przedziale P, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in P$, $x_1 < x_2$ oraz dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$ jeżeli y_0 leży między $f(x_1)$ i $f(x_2)$, to istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ taki, że

$$y_0 = f(x_0)$$

Twierdzenie

Każda rzeczywista funkcja ciągła w przedziale ma w tym przedziale własność Darboux.