Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Liczby rzeczywiste

Zasada indukcji matematycznej

Jeśli S jest podzbiorem liczb naturalnych o następujących własnościach

- $n_o \in S$,
- $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$,

to $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_0\}$.

Nierówność Bernoulliego

Dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$, $x \neq 0$ zachodzi nierówność:

$$(1+x)^n > 1 + nx, \qquad dla\ n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$$

Zbiór ograniczony

$A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

- A jest ograniczony z góry $\iff \bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} x \leqslant M$,
- A jest ograniczony z dołu $\iff \bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} m \leqslant x$,
- A jest ograniczony $\iff$ A jest ograniczony z góry i z dołu

$$\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in A} |x| \leqslant M$$

Aksjomat ciągłości:
Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry, to istnieje najmniejsza liczba rzeczywista M taka, że

$$\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M$$

Taką liczbę M nazywamy *kresem górnym zbioru* A i oznaczamy $supA$

$M = supA \iff$

- $\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M$
- $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x \in A} x > M - \varepsilon$

Liczby rzeczywiste

Kres dolny zbioru A ograniczonego z dołu:
Oznaczamy $infA$

$M = infA \iff$

- $\bigwedge_{x \in A} x \geqslant M$
- $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x \in A} x < M - \varepsilon$

Pewnik Archimedesa

Jeśli $x > 0$, to dla dowolnego $y > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$y \leqslant nx$$

Funkcje, cz. 2

Funkcje monotoniczne:
$D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$

- f – rosnąca $\iff \bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- f – niemalejąca $\iff \bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$
- f – stała $\iff \bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in D} f(x_1) = f(x_2)$
- f – nierosnąca $\iff \bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$
- f – malejąca $\iff \bigwedge\limits_{x_1, x_2 \in D} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Funkcje, cz. 2

Parzystość funkcji:
Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że

$$x \in D \Rightarrow (-x) \in D$$

Wtedy $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest:

- parzysta $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} f(-x) = f(x)$
- nieparzysta $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} f(-x) = -f(x)$

Wypukłość:
$P \subseteq \mathbb{R}$ – przedział o końcach a i b $(a < b)$, $f : P \to \mathbb{R}$

- f – wypukła $\Leftrightarrow$
  $$\bigwedge_{\lambda \in [0,1]} \bigwedge_{x,y \in P} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
- f – wklęsła $\Leftrightarrow$
  $$\bigwedge_{\lambda \in [0,1]} \bigwedge_{x,y \in P} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Funkcje elementarne

- Wielomiany,
- Funkcje wymierne,
- Funkcja wykładnicza,
- Funkcja logarytmiczna,
- Funkcje trygonometryczne: sin, cos, tg, ctg,
- Funkcje cyklometryczne (kołowe):
  - arc sin
  - arc cos,
  - arctg,
  - arcctg.

Liczby zespolone

Liczby zespolone $\mathbb{C}$ – uporządkowane pary liczb rzeczywistych z działaniami:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Wtedy:

- pary $(a, 0)$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi,
- parę $(0, 1)$ utożsamiamy z jednostką urojoną i ionaczamy symbolem i.

Inaczej:

$$z = a + bi$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ ($\sqrt{i} = -1$), czyli

$$a + bi = (a, b)$$

Liczby zespolone

Jeżeli $z = a + bi$, to:

- $Re(z) = a$ – część rzeczywista liczby z,
- $Im(z) = b$ – część urojona liczby z,
- $\bar{z} = a - bi$ – sprzężenie liczby z,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – moduł liczby z.

Własności:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej:

$$z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gdzie $\varphi = arg(z)$ – argument liczby zespolonej z, tzn. kąt skierowany taki, że

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

($Arg(z)$ – argument główny liczby z, kąt z przedziału $[0, 2\pi)$)

Liczby zespolone

Twierdzenie

Jeżeli

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

to

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Wzór de Moivre'a

Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to dla $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Liczby zespolone

Twierdzenie

Dla dowolnego $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ równanie

$$z^n = w$$

ma dokładnie n różnych pierwiastków.
Jeżeli

$$w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

to pierwiastki te dane są wzorami:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

gdzie $k \in \{0, 1, \ldots n - 1\}$.

Liczby zespolone

Zasadnicze twierdzenie algebry

Dowolny wielomian o współczynnikach zespolonaych stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych.