Matematyka 1

Łukasz Dawidowski

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

Zdanie (w sensie logicznym) – takie zdanie w sensie gramatycznym, które jest prawdziwe lub fałszywe.

- jeżeli zdanie jest prawdziwe, to przypisujemy mu wartość logiczną 1,
- jeżeli jest fałszywe, to przypisujemy wartość logiczną 0.

Oznaczenia zdań: p, q, r, ...

Spójniki logiczne:

- negacja zdania p: $\neg p$, $\sim p$

p	$\neg p$
1	0
0	1

- koniunkcja zdań p i q: $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- alternatywa zdań p i q: $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- implikacja zdań p i q: $p \longrightarrow q$, $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- równoważność zdań p i q: $p \leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Przykład: Drzewo ma liście. (nie jest to zdanie w sensie logicznym)

Funkcja zdaniowa – wypowiedź jest funkcją zdaniową o dziedzinie $X \neq \emptyset$, jeślipo podstawieniu dowolnego elementu zbioru X za zmienną otrzymamy zdanie.

Niech $\alpha(x)$ będzie funkcją zdaniową. Wtedy zbiór wszystkich (i tylko tych) elementów $x_0 \in X$ takich, że $\alpha(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym oznaczać będziemy symbolem

$$\{x \in X : \alpha(x)\}$$

Prawa rachunku zdań (zdania zawsze prawdziwe, tautologie):

- prawa de Morgana

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- łączność alternatywy i koniunkcji

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

- rozdielności:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- prawo kontrapozycji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

- negacja implikacji

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

- prawo wyłączonego środka

$$p \vee (\neg p)$$

Elementy rachunku kwantyfikatorów

Niech $p(x)$ będzie funkcją zdaniową zmiennej x o dziedzinie X.

- Zdanie: „Istnieje x w zbiorze X taki, że $p(x)$" zapisujemy w postaci

$$\exists_{x \in X} p(x) \qquad \bigvee_{x \in X} p(x)$$

- Zdanie: „Dla każdego x ze zbioru X takiego, że $p(x)$" zapisujemy w postaci

$$\forall_{x \in X} p(x) \qquad \bigwedge_{x \in X} p(x)$$

Zwroty *istnieje* i *dla każdego* oraz odpowiadające im symbole $\bigvee$, $\bigwedge$ nazywamy kwantyfikatorami:

- $\bigvee$ – egzystencjalnym (małym),
- $\bigwedge$ – ogólnym (dużym).

Prawa logiczne dla kwantyfikatorów:

- $$\left(\bigwedge_{x\in X} p(x) \vee \bigwedge_{x\in X} q(x)\right) \Rightarrow \bigwedge_{x\in X} (p(x) \vee q(x))$$
- $$\bigvee_{x\in X} (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \left(\bigvee_{x\in X} p(x) \wedge \bigvee_{x\in X} q(x)\right)$$
- prawa de Morgana:

$$\neg\left(\bigwedge_{x\in X} p(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_{x\in X} \neg p(x)$$

$$\neg\left(\bigvee_{x\in X} p(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in X} \neg p(x)$$

Rachunek zbiorów = teoria mnogości

Zbiór i element zbioru *longrightarrow* pojęcia pierwotne

$x \in X$ – „x jest elementem zbioru X"
$x \notin X$ – „x nie jest elementem zbioru X"
$A \subseteq B$ – $x \in A \Rightarrow x \in B$ – zbiór A zawiera się w zbiorze B

Rachunek zbiorów = teoria mnogości

X – przestrzeń, $A, B \subseteq X$.

- dopełnienie zbioru A

$$A' = \{x \in X : x \notin A\}$$

- różnica zbiorów A i B

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

- suma zbiorów A i B

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$

- iloczyn (przekrój) zbiorów A i B

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$

Rachunek zbiorów = teoria mnogości

Mówimy, że zbiory A i B są rozłączna, jeżeli

$$A \cap B = \emptyset$$

Mówimy, że $A = B$, jeżeli

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Zbiór mający skpończoną ilość elementów nazywamy zbiorem skończonym; zbiór mający nieskończoną ilość elementów nazywamy zbiorem nieskończonym.

Rachunek zbiorów = teoria mnogości

Niektóre własności działań na zbiorach:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Rachunek zbiorów = teoria mnogości

Zbiór, którego elementy są zbiorami nazywamy *rodziną zbiorów*.

Niech T będzie dowolnym zbiorem wskaźników oraz niech $\{A_t : t \in T\}$ będzie rodziną zbiorów. Wtedy:

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \iff \bigvee_{t \in T} x \in A_t$$

$$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \iff \bigwedge_{t \in T} x \in A_t$$

Funkcje

Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami ($X, Y \neq \emptyset$).

$f\colon X \to Y \leftrightarrow$ **funkcja**, jeżeli każdemu elementowi x zbioru X przyporządkowany jest dokładnie jeden element y zbioru Y.

X – dziedzina funkcji f
Y – przeciwdziedzina funkcji f

jeśli $x \in X$, to piszemy: $y = f(x)$ – wartość funkcji f dla argumentu x

Funkcje

Niech $f\colon X_1 \to Y_1$ i $g\colon X_2 \to Y_2$ będą funkcjami. Wtedy

$$f = g$$

jeżeli

- $X_1 = X_2$,
- $\bigwedge_{x \in X_1} f(x) = g(x)$

Funkcje

Niech $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

- Zbiór
$$f(A) = \{y \in Y\colon \bigvee_{x \in A} y = f(x)\}$$
nazywamy obrazem zbioru A poprzez funkcję f.
- Zbiór
$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$$
nazywamy przeciwobrazem zbioru B poprzez funkcję f.

Funkcje

Niech $f\colon X \to Y$. Wtedy:

- f nazywamy surjekcją (odwzorowaniem „na”), jeśli $f(X) = Y$,
- f nazywamy funkcją różnowartościową, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

  albo

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),$$

- f jest odwracalna, jeżeli jest surjekcją i jest różnowartościowa.

Funkcje

Złożenie funkcji
Niech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Wtedy odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ dane wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in X$$

nazywamy złożeniem (superpozycją) funkcji f i g.

Uwaga: Składanie funkcji nie jest przemienne, tzn. $f \circ g \neq g \circ f$!

Równoliczność zbiorów (kilka uwag)
Zbiory A i B nazywamy *równolicznymi*, jeżeli istnieje odwracalna funkcja f (tzn. jest surjekcją i jest różnowartościowa) taka, że

$$f : A \longrightarrow B$$

Uwagi:

- zbiory skończone są równoliczne, kiedy mają taką samą liczbę elementów,
- zbiór $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorami $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$,
- każdy niezdegenerowany przedział liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$,
- zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ **nie** są równoliczne.

Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, jeżeli jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, tzn.:

- albo jest skończony
- albo jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$.

Zbiory, które nie są przeliczalne, nazywamy zbiorami *nieprzeliczalnymi*.
Przykłady: $\mathbb{R}$, (a, b), $[a, b]$ dla $a < b$.

Iloczyn kartezjański
$X, Y \neq \emptyset$

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

Jeśli $X = Y$, to będziemy pisali $X^2 = X \times X$.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \neq \emptyset$, to

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\}} x_i \in X_i\}$$

Jeśli $X = X_1 = \ldots = X_n$, to piszemy: $X^n = X_1 \times \ldots \times X_n$.
Jeśli $X = \mathbb{R}$, to $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-razy}$.

Funkcje

Wykres odwzorowania
$f\colon X \to Y$

$$gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y\colon y = f(x)\}$$

Twierdzenie:
Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem odwracalnym, to odwzorowanie $g\colon Y \xrightarrow{na} X$ jest odwzorowaniem odwrotnym do f wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = x \quad \wedge \quad \bigwedge_{y \in Y} (f \circ g)(y) = y$$