

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Zadania różne

1. Niech n i m będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $25m + 3n$ jest podzielna przez 83 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3m + 7n$ jest podzielna przez 83. (Baltic Way, 1990)

2. Liczby wymierne a i b spełniają warunek

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = 2a^n b^n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba $1 - ab$ jest kwadratem liczby wymiernej. (Rosja, 1990)

3. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y + z + yz)x + (y + z)yz = 0, \\ y^2 - (z + x + zx)y + (z + x)zx = 0, \\ z^2 - (x + y + xy)z + (x + y)xy = 0. \end{cases}$$

(LXI OM)

4. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie:

$$(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1).$$

(LXI OM)

5. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3 b^3} + \sqrt{b^3 c^3} + \sqrt{c^3 a^3}) \leq 4c^3 + (a + b)^3.$$

(LX OM)

6. (a) Udowodnić, że jeśli $xyz = 1$ i żadna z liczb rzeczywistych x, y, z nie jest równa 1, to spełniona jest nierówność

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(b) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb wymiernych x, y, z , każda z których jest różna od 1, dla których spełniona jest równość $xyz = 1$ i dla których powyższa nierówność staje się równością. (49 MOM)

7. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

(LIX OM)

8. W n -osobowym stowarzyszeniu działa $2n - 1$ komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A i B , to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A, B . Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących. (LIX OM)