

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Wielomiany

1. Dany jest wielomian $f(x) = x^4 + 26x^3 + 52x^2 + 78x + 1989$. Udowodnij, że nie istnieją wielomiany $p(x)$ i $q(x)$ o współczynnikach całkowitych stopni niższych niż 4 takie, że $f(x) = p(x)q(x)$.
2. Udowodnić, że wielomian $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{1}{4}$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
3. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia warunek

$$P(1993)P(1994) = 1995.$$

Rozstrzygnij, czy $P(x)$ ma pierwiastki całkowite.

4. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla każdego rzeczywistego x równość

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1.$$

5. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, zaś a, b takimi różnymi liczbami całkowitymi, że $f(a)f(b) = -(a-b)^2$. Udowodnij, że $f(a) + f(b) = 0$.
6. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ przy dzieleniu przez $x - 1$ daje resztę 1, a przy dzieleniu przez $x - 4$ resztę 6. Wyznacz a i b .
7. Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez $x - 1$ resztę 2, przy dzieleniu przez $x - 2$ resztę 3, a przy dzieleniu przez $x - 3$ resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
8. Niech $f(x)$ będzie wielomianem, n -liczbą naturalną. Udowodnij, że jeżeli $f(x^n)$ dzieli się przez $x - 1$, to dzieli się również przez $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$. (39 OM)
9. Udowodnij, że jeżeli wielomian f o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla czterech różnych argumentów całkowitych wartość 1, to dla żadnego argumentu całkowitego nie przyjmuje wartości -1 . (31 OM)