

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Geometria, wektory i ich zastosowania

1. Udowodnij, że jeżeli α , β , γ są kątami trójkąta ABC , to

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) \geqslant -\frac{3}{2},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

2. Na okręgu opisano czworokąt $ABCD$. Przecięte boki AB i CD oraz BC i AD leżą na prostych przecinających się w punktach odpowiednio M i N . Udowodnij, że

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D + \cos M + \cos N \leqslant 2.$$

Tutaj $\cos A$ oznacza kąt leżący przy wierzchołku A .

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a + b + c \geqslant \sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{ab^2c} + \sqrt[4]{abc^2}.$$

4. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x + 4y - 1}{\sqrt{17}}.$$

5. Rozwiąż układ równań (dla $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3, \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3, \\ x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2} = 3. \end{cases}$$

6. Wykaż nierówność:

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leqslant 1.$$