

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Stereometria

1. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD , ACD , ABD , ABC odpowiednio w punktach P , Q , R , S . Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A_0 , Q_0 , R_0 , S_0 są punktami przecięcia prostych TA , TQ , TR , TS z płaszczyzną BCD . Wykazać, że A_0 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q_0R_0S_0$. (60. OM)
2. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q . Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q . Punkt R leży na krawędzi AB , przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP , CD oraz $2 \cdot QR$ można zbudować trójkąt. (58. OM)
3. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD,$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD . (58. OM)

4. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny. (57. OM)
5. Czworościan $ABCD$ jest opisany na kuli o środku S i promieniu 1, przy czym $SA \geq SB \geq SC$. Wykazać, że $SA > \sqrt{5}$. (57. OM)