

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Równania funkcyjne

1. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x + y) - f(x - y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(XLIV OM)

3. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ f(x + 1) &= f(x) + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^2}f(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

(XLIV OM)

4. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Wyznacz wszystkie funkcje różnowartościowe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

6. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

7. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

(Uwaga: Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.) (LXI OM)

8. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotoniczne i spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(4x) - f(3x) = 2x.$$

(42 OM)

9. Wyznacz wszystkie wielomiany f spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x^2) = (f(x))^2.$$

10. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x + 1) - f(x - 1) = 0,$$

to funkcja f jest okresowa

11. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki $f(2) = 2$ oraz

$$f(xy) = x^2f(y) + yf(x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$