

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Podstawienia trygonometryczne

1. Spośród wszystkich rozwiązań układu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

wyznacz te, dla których suma $x + z$ jest największa.

2. Niech

$$f(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}}.$$

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$f(a, c) \leq f(a, b) + f(b, c).$$

3. Ciąg (x_n) jest określony następująco

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n)$$

4. Liczby rzeczywiste spełniają warunki:

$$|x| \neq 1, \quad |y| \neq 1, \quad |z| \neq 1,$$

$$x + y + z = xyz.$$

Udowodnij, że

$$\frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2x}{1 - x^2} \cdot \frac{2y}{1 - y^2} \cdot \frac{2z}{1 - z^2}$$