

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Nierówności

1. Wykaż, że jeżeli liczby a, b są dodatnie, to:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

2. Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są różne od zera, to:

$$a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}.$$

3. Wykaż, że jeżeli liczby a, b i c są dodatnie, to:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(VIII OM)

Udowodnić dodatkowo, że jeżeli a, b, c są bokami trójkąta, to:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

4. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

5. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c i d są takimi liczbami dodatnimi, że $a + b + c + d \leq 1$, to:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \leq \frac{1}{64abcd}.$$

(Białoruś 1994)

6. Wykazać, że jeżeli liczby a, b i c są dodatnie, to:

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

(58 OM)

7. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d mamy:

$$(a+b+c+d)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 6ab.$$

(50 OM)

8. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

9. Wykaż, że jeżeli $p, q, r > 0$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$ są takie, że $p + q + r = 1$ oraz $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = \frac{1}{pa+qb+rc}$, to $a = b = c$.

10. Wykaż, że jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ są takie, że $x + y = 1$, to

(a) $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2},$

(b) Jaką najmniejszą wartość może przyjmować wyrażenie $x^{2n} + y^{2n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.