

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Konkurs 3

1. Dane są liczby $a, b, c \in \mathbb{Q}$, które spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6.$$

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$a^4 + b^4 + c^4 > 12.$$

2. Rozwiąż w zbiorze liczb całkowitych dodatnich układ równań

$$\begin{cases} 1 - x = x - xy, \\ 2 - 2y = y - yz, \\ 3 - 3z = z - zx. \end{cases}$$

3. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych nieujemnych n , liczba postaci $117^n + 118^n + 119^n$ jest podzielne przez 3.
4. Dany jest trójkąt ABC taki, że $|\angle BAC| = 60^\circ$. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC , a O środkiem Ω . Dwusieczna kąta $\angle BAC$ przecina okrąg Ω w punkcie $D \neq A$. Punkty E i F są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu D na proste OB i OC . Wykaż, że $|BC| = 2|EF|$.
5. Mamy 20 worków i 20 kotów. Dla każdego worka i każdego kota ustalamy cenę (worek kosztuje minimum 2,10 zł, maksymalnie 4 zł, a kot kosztuje nie mniej niż 10 zł, a nie więcej niż 12 zł). Ceny są całkowitymi wielokrotnościami jednego grosza. Czy możemy tak ustalić ceny (różne dla różnych worków i różnych kotów), żeby pierwszy nasz klient nie był w stanie kupić dwóch zestawów 'kot – worek' po tej samej cenie?