

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Konkurs 2

1. Wykaż, że trójkąt o bokach długości a , b i c , gdzie $a = 2^{4034} + 2^{2018}$, $b = 3 \cdot 2^{4030} - 2^{2017} - 1$, $c = 5 \cdot 2^{4030} + 2^{2017} + 1$ jest prostokątny.
2. Rozwiąż w zbiorze liczb rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

3. Działanie $\star$ spełnia warunki

$$\begin{cases} x \star x = 0, \\ x \star (y \star z) = (x \star y) + z \end{cases}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z . Rozstrzygnij, czy liczba $\sqrt[2016]{2018 \star 2017}$ jest liczbą naturalną. Odpowiedź uzasadnij.

4. Rozstrzygnij, czy istnieją takie różne liczby naturalne a, b, c, d , że $a^2 + 2cd + b^2$ oraz $c^2 + 2ab + d^2$ są kwadratami liczb naturalnych. Odpowiedź uzasadnij.
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $n^2 + 3n + 3$ jest podzielna przez 2015.
6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite a , dla których trójmian $(x - a)(x - 10) - 1$ ma dwa pierwiastki całkowite.
7. Dwusieczne kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach P, Q, R, S . Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.
8. Suma wieku Doroty i Teresy jest równa 72. Dorota jest dwa razy starsza niż Teresa wtedy, gdy Dorota była w połowie wieku, który Teresa osiągnie, gdy będzie trzy razy starsza niż Dorota wtedy, gdy Dorota była trzy razy starsza od Teresy. Ile lat ma Dorota, a ile Teresa?
9. Wykaż, że spośród 2018 dowolnych liczb całkowitych można wybrać jedną lub więcej, których suma jest podzielna przez 2018.
10. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{2x - 2y}{xy + 4y + 4} + \frac{2y - 2z}{yz + 4z + 4} + \frac{2z - 2x}{zx + 4x + 4} \geq 0.$$