

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Konkurs

1. Rozstrzygnij, która z liczb jest większa $(2^{2017})!$, czy $2^{2017!}$. Odpowiedź uzasadnij.
2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne k takie, że liczba $k^4 + 7$ jest podzielna przez $k + 5$.
3. Wykaż, że jeśli liczby całkowite $a, b, c \in [2, \infty)$, to prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a^4 + b^4 + 1} + \frac{1}{b^4 + c^4 + 1} + \frac{1}{c^4 + a^4 + 1} \leq \frac{1}{11}.$$

4. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 6 = 4x + y, \\ y^2 + 6 = 4y + z, \\ z^2 + 6 = 4z + x. \end{cases}$$

5. Trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle ACB = 90^\circ$ wpisano okrąg. Rzut tego okręgu na przeciwprostokątną AB jest odcinkiem MN . Wyznacz miarę kąta MCN ,
6. Funkcja f określona na zbiorze $\mathbb{R}$ i przyjmująca wartości rzeczywiste spełnia dla każdego $x > 0$ warunek

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2017}{x}\right) = \frac{1}{672}x + \frac{7391}{672}.$$

Rozstrzygnij, czy $\sqrt[2017]{f(2017)}$ jest liczbą wymierną. Odpowiedź uzasadnij.

7. Jaś ma 36 drewnianych klocków. Pomalował je używając trzech kolorów: białego, brązowego i czarnego. Niektóre klocki pomalował tylko jednym kolorem, inne dwoma, a pozostałe 5 klocków wszystkimi trzema kolorami. Białej farby użył do pomalowania 25 klocków, brązowej do pomalowania 28 klocków, a czarnej do pomalowania 20 klocków. Ile klocków pomalował tylko jednym kolorem?