

Wybrane zagadnienia matematyki elementarnej

Kombinatoryka

1. W turnieju szachowym wzięło udział n zawodników ($n \geq 2$). Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie jedną partię, przy czym żadna partia nie zakończyła się remisem. Niech w_i oraz p_i będą odpowiednio liczbami zwycięstw i porażek i -tego gracza, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Delta 5/2018, M1564.

2. W turnieju szachowym bierze udział $2n$ zawodników ($n \geq 2$). Chcemy zaplanować rozgrywki składające się z $2n - 1$ rund w taki sposób, by każdy zawodnik rozegrał w każdej rundzie dokładnie jedną partię oraz tak, aby w całym turnieju każdy zawodnik zagrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie raz. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których jest to możliwe.

Delta 5/2018, M1565.

3. W turnieju szachowym wzięło udział n zawodników ($n \geq 3$). Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie jedną partię, przy czym żadna partia nie zakończyła się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wyznaczyć w zależności od n , największą liczbę k o następującej własności: istnieje (niezależnie od przebiegu turnieju) co najmniej k takich trójek A, B, C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

Delta 5/2018, M1566.

4. W pewnym kraju jest skończona liczba miast. Między niektórymi parami miast istnieją jednokierunkowe połączenia autobusowe. Sieć komunikacyjna ma tę własność, że nie można zaplanować podróży złożonej z co najmniej jednego kursu, która zaczyna się i kończy w tym samym mieście. Udowodnić, że istnieje miasto, z którego nie można wyjechać autobusem oraz miasto, do którego nie można dojechać.

Delta 1/2018, M1553.

5. W pewnym kraju jest $2n$ miast. Między niektórymi parami miast istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze, których w sumie jest k . Ceny biletów na różnych odcinkach są różne, ale na każdym odcinku cena jest taka sama niezależnie od kierunku lotu. Wyznaczyć najmniejszą stałą c (niezależną od n i k) o tej własności, że zawsze można zaplanować podróż złożoną z co najmniej $c \cdot \frac{k}{n}$ przelotów, aby każdy kolejny lot był droższy od poprzedniego.

Delta 1/2018, M1554.

6. Niech k będzie parzystą liczbą naturalną. Danych jest k kart; na każdej z nich napisana jest liczba ze zbioru $\{1, \dots, k\}$. Suma wszystkich liczb napisanych na kartach wynosi $2k$. Dowiedzieć, że karty można podzielić na takie dwie grupy, że suma liczb napisanych na wszystkich kartach jednej grupy wynosi k .

7. Rozważamy wszystkie k -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$ ($0 < k \leq n$). W każdym podzbiornie wybieramy najmniejszą liczbę. Wyznaczyć średnią arytmetyczną wszystkich wybranych liczb.

8. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następującej własności: Po usunięciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1 .

9. W n -osobowym stowarzyszeniu działa k komisji. Każda komisja liczy co najmniej dwóch członków, zaś dowolne dwie komisje mają dokładnie jednego wspólnego członka. Dowiedzieć, że $k \leq n$.

10. W pewnym kraju jest $2^n + 1$ miast. Między dowolnymi dwoma z nich istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze obsługiwane przez jedną z n -linii. Dowiedzieć, że któraś z tych linii lotniczych może oferować podróż z nieparzystą liczbą lotów, zaczynającą się i kończącą w tym samym mieście.

11. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1, x_2, \dots, x_{6n-1})$ zbioru $\{1, 2, \dots, 6n-1\}$, spełniających warunki:

jeśli $i - j = 2n + 1$, to $x_i > x_j$;

jeśli $i - j = 4n$, to $x_i < x_j$.

(58. OM)

12. Dany jest zbiór n punktów ($n \geq 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o końcach w jednym punkcie miały różne kolory. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla których istnieje takie pokolorowanie. (48. OM)

13. W turnieju tenisowym uczestniczyło n graczy. Każdy rozegrał z każdym jeden mecz; nie było remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A , który każdego innego gracza B pokonał w sposób bezpośredni lub pośredni, tzn. A wygrał z B lub A pokonał pewnego zawodnika C , który wygrał z B . (49. OM)
14. Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy dopuszczalnym jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu i w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa. Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest pole czerwone. (51. OM)
15. Dla danej liczby naturalnej n znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k -elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta. (51. OM)
16. Dana jest szachownica 2000×2000 . Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeśli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiegokolwiek pole). Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole. (53. OM)
17. W n -osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $\frac{n}{4}$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $\frac{n}{30}$ osób, należących do obu tych komisji. (53. OM)
18. U cici Reni spotkało się (łącznie z cicią) $n - 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia. (54. OM)